



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

Synchronized Candles

同步蜡烛



报告人：余荫铠



小组成员：李明育、罗俊平、莫梁虹、苏树云、余荫铠

目录

CONTENTS

01

赛题再现和研究背景

02

建立模型

03

实验检验

04

研究展望和总结

05

附录



中山大學

SUN YAT-SEN UNIVERSITY

Part.01

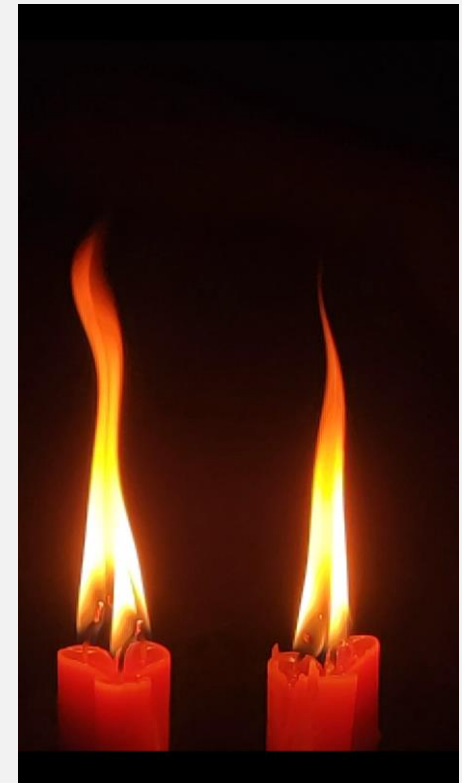
赛题再现和研究背景

1.1 题目再现

5: Synchronised Candles 同步蜡烛

Oscillatory flames can be observed when several candles burn next to each other. Two such oscillators can couple with each other, resulting in in-phase or anti-phase synchronisation (depending on the distance between the sets of candles). Explain and investigate this phenomenon.

当几支蜡烛相邻燃烧时，可以观察到**振荡火焰**。两个这样的振荡器可以结合在一起，导致**同相位或反相位同步**(取决于两组蜡烛之间的距离)。解释和调查这一现象。



1.2 观察现象



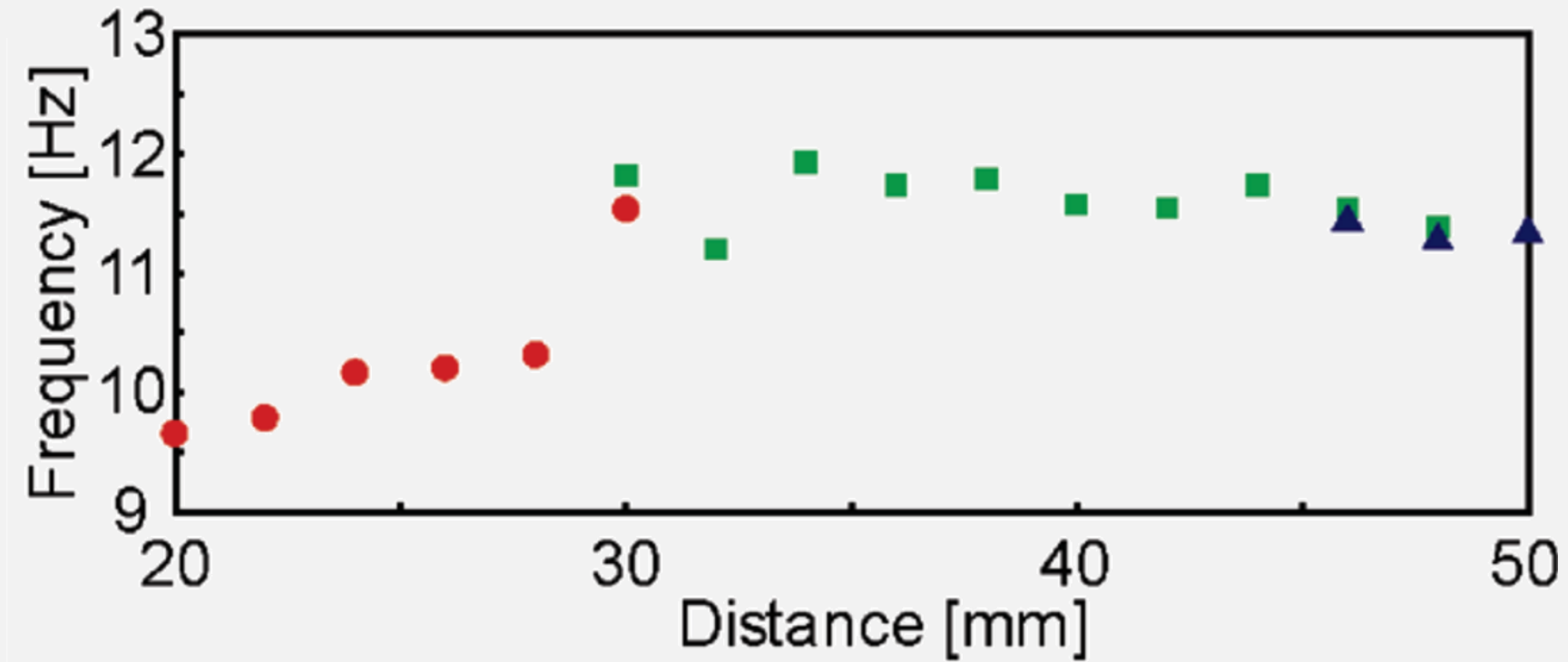
近距离 (27mm) 同相



远距离 (31mm) 反向或同相



1.2 观察现象



同相的频率比反向低



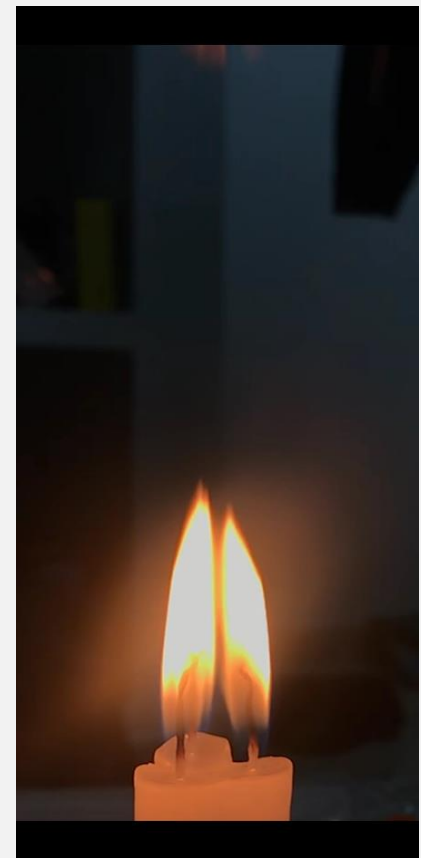
1.2 观察现象



单根蜡烛不会振动



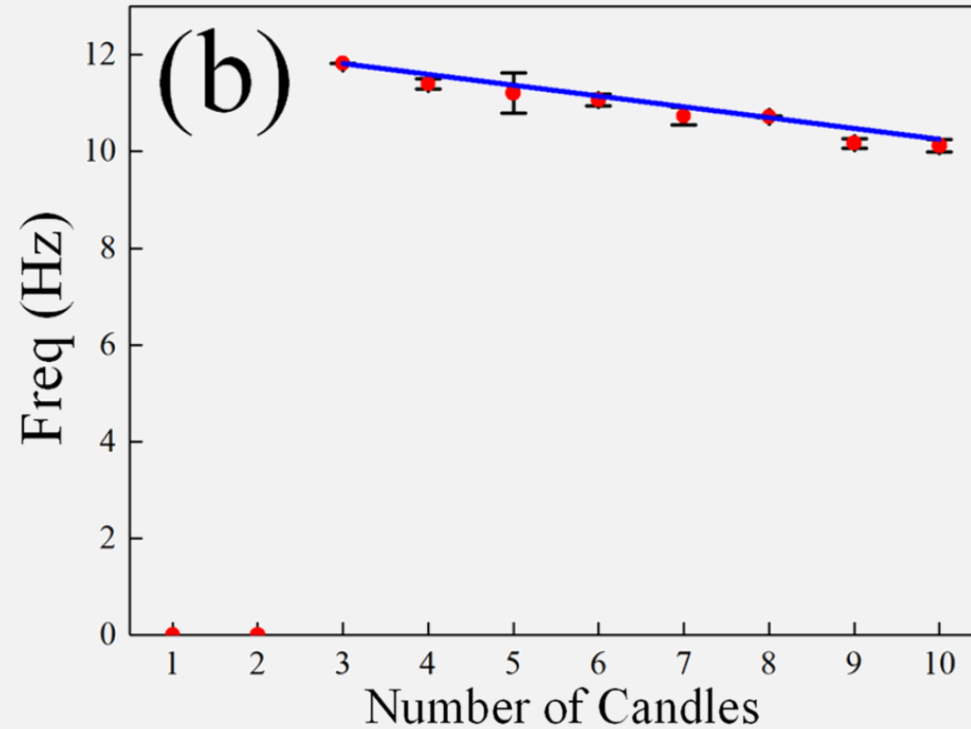
两根蜡烛振动不明显



三根及以上蜡烛明显振动₇

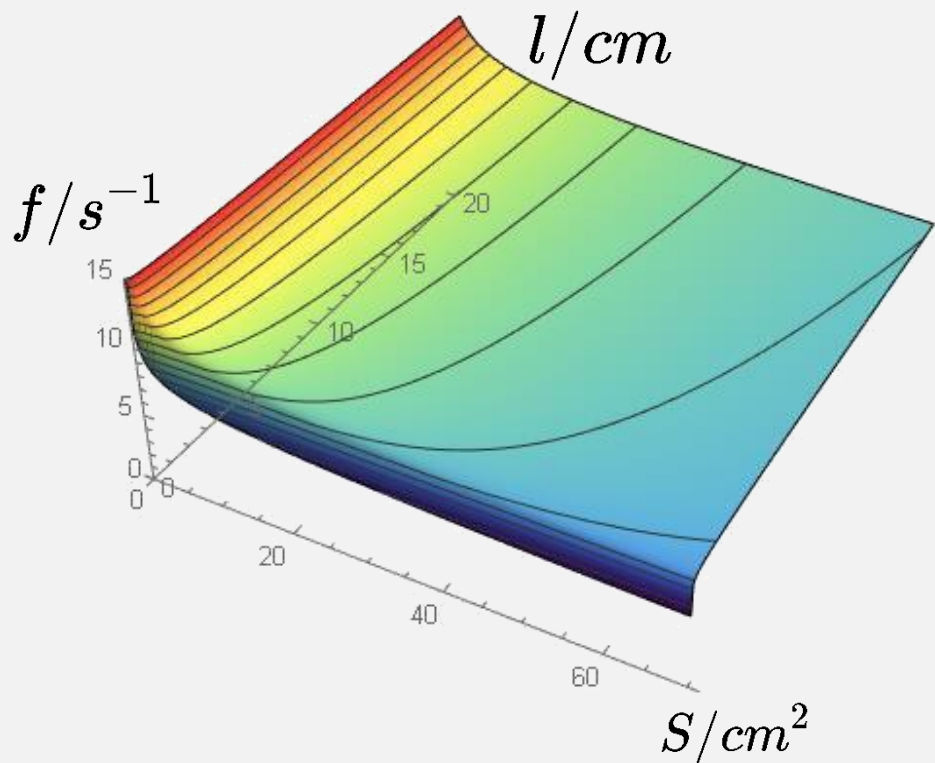


1.2 观察现象

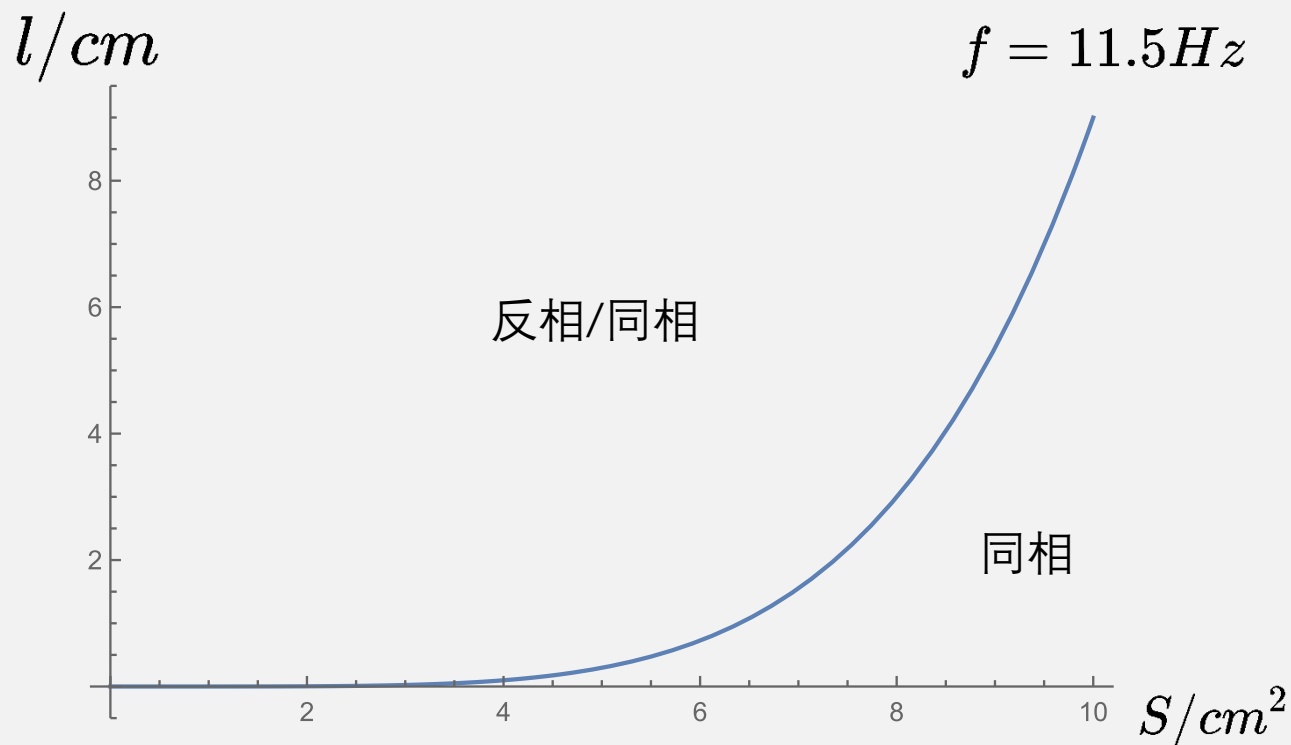


频率随蜡烛根数的增大而减小

1.2 观察现象



模拟赛的相图
忽略了离散性
但仍有参考价值



相图截面
随着蜡烛数量增加，最小反相距离增大



1.3 研究现状

- 2009年 Kitahata团队：提出**振动由氧气周期性变化引起的，耦合是由热辐射引起的。**
- 2015年 Forrester团队：观察了极多组蜡烛耦合的耦合模式，分析其群体行为。
- 2016年 Okamoto团队：观察了三组蜡烛的振动，分析其对称性，提出由**气流涡旋导致耦合。**
- 2017年 Nagamine团队：通过气象学类比，提出**振动是由下沉气团中的杂质引起的。**
- 2017年 Ting Chen团队：纹影摄像观察气流，提出有效辐射范围重叠的唯象理论。
- 2018年 Manoj团队：观察了同相与反相的两种过渡模式。
- 2019年 Tao Yang团队：通过模拟仿真观察气流涡旋，提出**涡旋撕扯火焰导致振动。**
- 2019年 Fujisawa团队：用燃气代替蜡烛，粒子图像测速技术分析速度场，分析反相稳定性。
- 2019年 Manoj团队：观察了四组蜡烛的振动，研究其拓扑性质。

[1] H. Kitahata, J. Taguchi, M. Nagayama, T. Sakurai, Y. Ikura, A. Osa, Y. Sumino, M. Tanaka, E. Yokoyama, H. Miike, Oscillation and synchronization in the combustion of candles, *The Journal of Physical Chemistry A* 113(29) (2009) 8164-8168.

[2] D.M. Forrester, Arrays of coupled chemical oscillators, *Sci. Rep.* 5 (2015) 16994.

[3] K. Okamoto, A. Kijima, Y. Umeno, H. Shima, Synchronization in flickering of three-coupled candle flames, *Sci. Rep.* 6 (2016) 36145.

[4] Y. Nagamine, K. Otaka, H. Zuike, H. Miike, A. Osa, Mechanism of candle flame oscillation: Detection of descending flow above the candle flame, *Journal of the Physical Society of Japan* 86(7)(2017) 074003.

[5] T. Chen, X. Guo, J. Jia, J. Xiao, Frequency and Phase Characteristics of Candle Flame Oscillation, *Sci. Rep.* 9(1)(2019) 1-13.

[6] K. Manoj, S.A. Pawar, R. Sujith, Experimental evidence of amplitude death and phase-flip bifurcation between in-phase and anti-phase synchronization, *Sci. Rep.* 8(1) (2018) 1-7.

[7] T. Yang, X. Xia, P. Zhang, Vortex-dynamical interpretation of anti-phase and in-phase flickering of dual buoyant diffusion flames, *Physical Review Fluids* 4(5) (2019) 053202.

[8] N. Fujisawa, K. Imaizumi, T. Yamagata, Synchronization of dual diffusion flame in co-flow, *Experimental Thermal and Fluid Science* 110 (2020) 109924.

[9] K. Manoj, S.A. Pawar, S. Dange, S. Mondal, R. Sujith, E. Surovyatkina, J. Kurths, Synchronization route to weak chimera in four candle-flame oscillators, *Physical Review E* 100(6) (2019) 062204.



1.3 研究现状

研究背景总结

方向多而乱

- 1. 同步蜡烛本身现象就十分丰富。
- 2. 并无一致的研究方向，研究者有各自完全不同的目的。
- 3. MORE IS DIFFERENT.

焦点问题尚未达成一致

- 1. 蜡烛火焰振动的原因有三种不同看法：氧气周期性变化引起振动，气流涡旋撕扯火焰引起振动，下沉气流中的杂质引起振动
- 2. 振动耦合的原因有两种不同的看法：热辐射引起振动，气流涡旋引起振动。

三大首要问题

- 1. 振子是什么？
- 2. 振动的原因是什么？
- 3. 耦合的原因是什么



中山大學

SUN YAT-SEN UNIVERSITY

Part.02

建立模型



2.0 建模前待研究问题

解决三大首要问题

振子是什么？

不同的模型，不同的假说，对应着不同的振子，但不同振子之间并不是相互独立的，选取哪种振子能够最简洁地描述振动呢？
温度？火焰形状？气流形态？

振动的原因是什么？

引起振动的原因并不是单一的，哪一项原因才是根本的原因？
氧气浓度？气流涡旋？杂质？

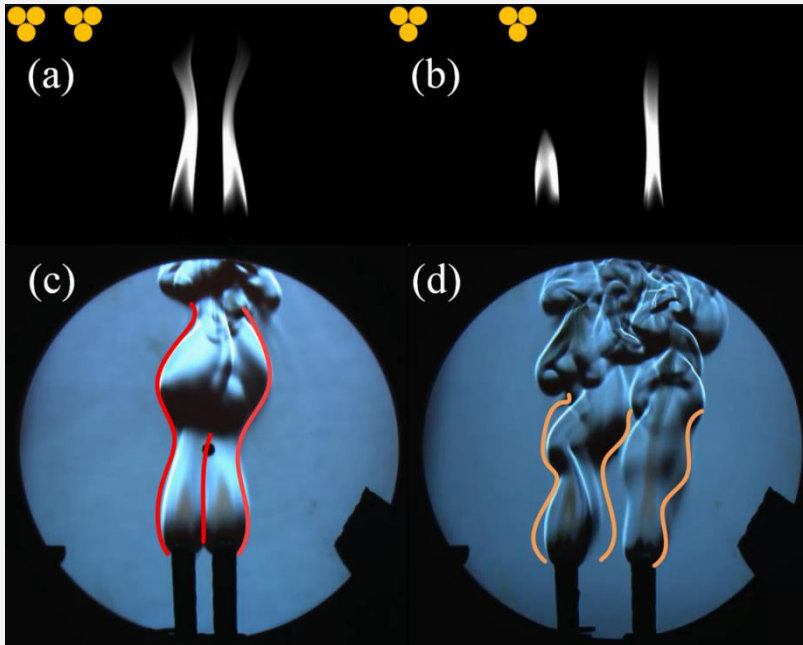
耦合的原因是什么？

引起耦合的原因也不会是单一的，但是哪一项原因是必不可少的，哪一项原因是锦上添花的？
热辐射？气流涡旋？



2.1 耦合的原因是什么

热辐射vs气流涡旋



热辐射集中在下部
气流运动集中在上部



下部纸片阻挡辐射而不阻挡气流

不耦合

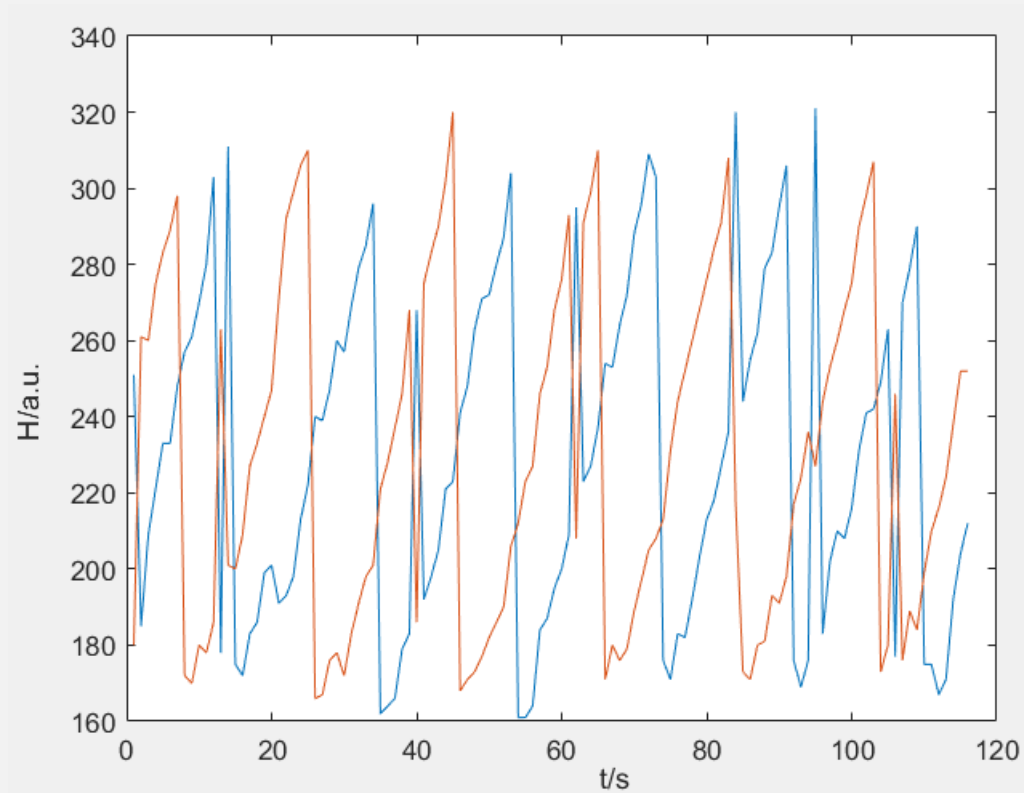


2.1 耦合的原因是什么

热辐射vs气流涡旋



保鲜膜阻挡气流而不阻挡辐射



耦合

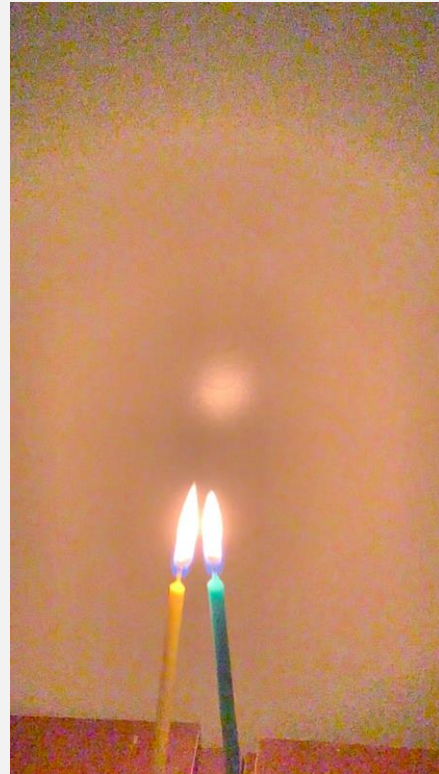


2.1 耦合的原因是什么

热辐射vs气流涡旋



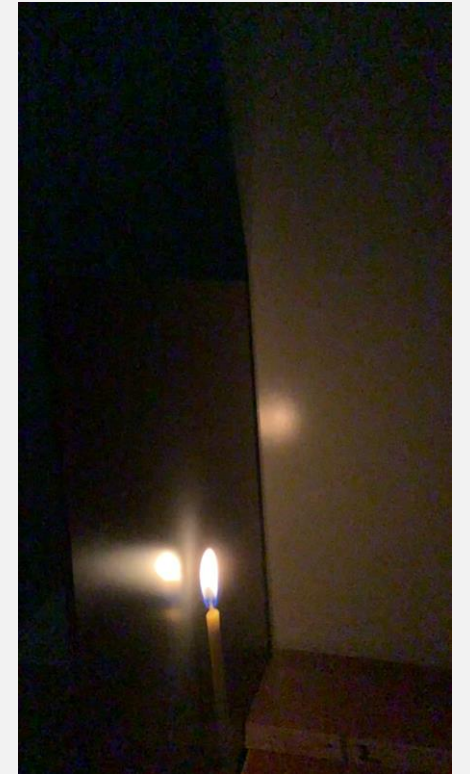
单株蜡烛不会振动



两根蜡烛耦合蜡烛会振动



蜡烛照镜子会振动



蜡烛照镜子的背面不会振动

蜡烛照镜子，有辐射作用无气流作用，可以发生耦合，说明耦合的主要原因是热辐射



2.1 振子是什么

温度vs火焰形状vs气流形态

耦合原因是
热辐射

热辐射直接
影响温度而
不是气流和
火焰形状

为便于建立
数学模型，
振子应当是
温度



2.3 振动的原因是什么

建立温度随时间变化的微分方程

$$C(T) \frac{dT}{dt} = P_{\text{对流}}(T) + P_{\text{燃烧}}(T) + P_{\text{辐射}}(T) \quad \text{普适理论}$$

为了得到一个直观的数学模型以半定量半定性探究其性质，不妨取适当近似

$$C(T) = C$$

$$P_{\text{对流}}(T) = h(T_0 - T) \quad // \text{牛顿冷却定律 (气流作用项, 此处极为简化)}$$

$$P_{\text{燃烧}}(T) = A n_{\text{石蜡}} n_{\text{氧气}}(T) e^{-\frac{E}{RT}} \Lambda \quad // \text{阿伦尼乌斯公式}$$

$$P_{\text{辐射}}(T) = A_{\text{火焰}} \phi \epsilon \sigma (T_0 - T^4) \quad // \text{斯特藩玻尔兹曼定律}$$



2.3 振动的原因是什么

近似之后的简化模型

$$C \frac{dT}{dt} = h(T_0 - T) + An_{\text{石蜡}} n_{\text{氧气}} e^{-\frac{E}{RT}} \Lambda + A_{\text{火焰}} \phi \epsilon \sigma (T_0 - T^4)$$

氧气随温度变化的微分方程

$$\frac{dn_{\text{氧气}}}{dt} = k(n_0 - n_{\text{氧气}}) - Bn_{\text{石蜡}} n_{\text{氧气}} (T) e^{-\frac{E}{RT}}$$

无量纲化

$$u = c \frac{T - T_0}{T_0} \quad v = \frac{n_{\text{氧气}}}{n_0} \quad \sigma_0 = \frac{A_{\text{火焰}} \phi \epsilon \sigma T_0^3}{CBk} \quad \tau = Bkt \quad c = \frac{E}{RT_0} \quad \epsilon = \frac{CkB}{hA} \quad a_v = \frac{n_{\text{石蜡}}}{k} e^{-c} \quad a_u = \frac{Acn_0 n_{\text{石蜡}} \Lambda}{T_0 h} e^{-c}$$



2.3 振动的原因是什么

无量纲化后得到的振动方程（近似模型）

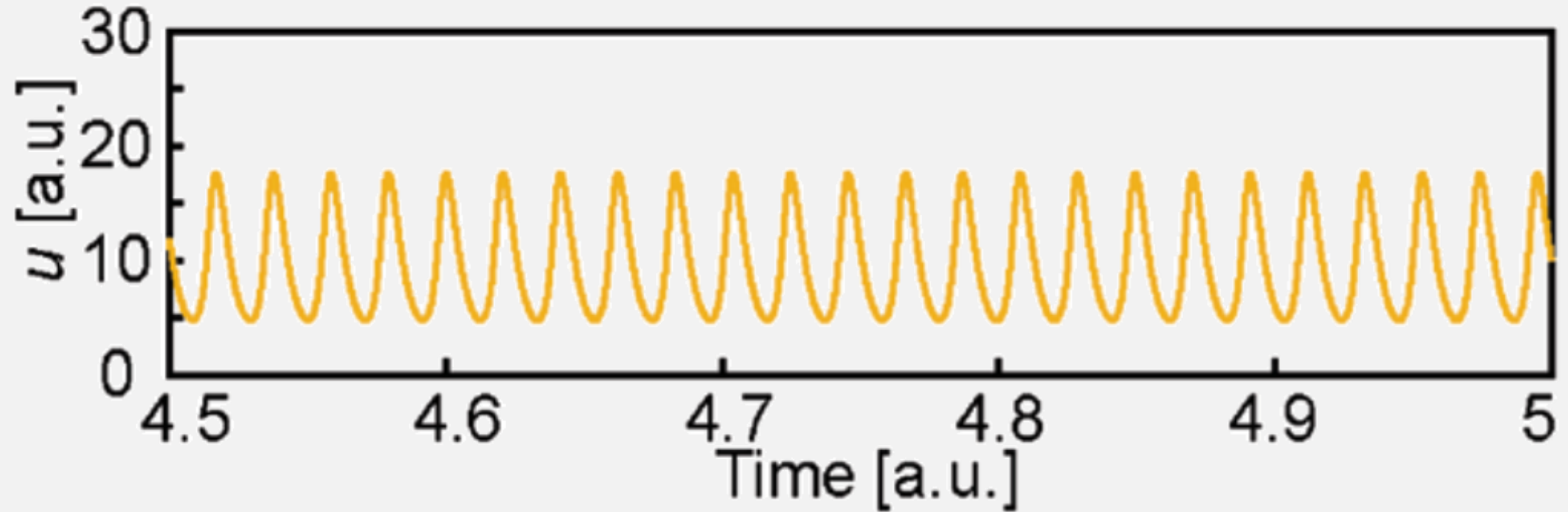
$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \left[-u + a_u v \exp\left(\frac{u}{1 + u/c}\right) \right] - \sigma_0 \left(1 + \frac{u}{c}\right)^4$$

$$\frac{dv}{dt} = 1 - v - a_v v \exp\left(\frac{u}{1 + u/c}\right)$$



2.3 振动的原因是什么

其振动图像为





2.4 耦合的原因是什么

用得到的近似模型半定性半定量解释耦合原因

对于双耦合系统有

$$C \frac{dT_i}{dt} = h(T_0 - T_i) + A n_{\text{石蜡}} n_{\text{氧气}i} e^{-\frac{E}{RT}} \Lambda + A_{\text{火焰}} \phi \epsilon \sigma (T_0 + \frac{\mu}{L^2} T_j^4 - T_i^4)$$

$$\frac{dn_{\text{氧气}i}}{dt} = k(n_0 - n_{\text{氧气}i}) - B n_{\text{石蜡}} n_{\text{氧气}i} e^{-\frac{E}{RT_i}}$$



2.4 耦合的原因是什么

用得到的近似模型半定性半定量解释耦合原因

无量纲化后得到

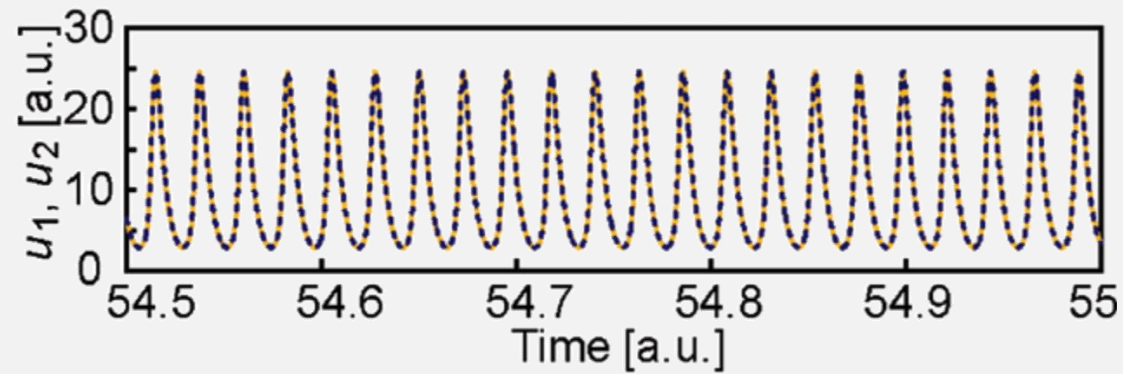
$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \left[-u_i + a_u v_i \exp\left(\frac{u_i}{1 + u_i/c}\right) \right] - \sigma_0 \left(1 + \frac{u_i}{c}\right)^4 + \sigma_0 u_0 \left(1 + \frac{u_j}{c}\right)^4$$

$$\frac{dv_i}{dt} = 1 - v_i - a_v v_i \exp\left(\frac{u_i}{1 + u_i/c}\right)$$

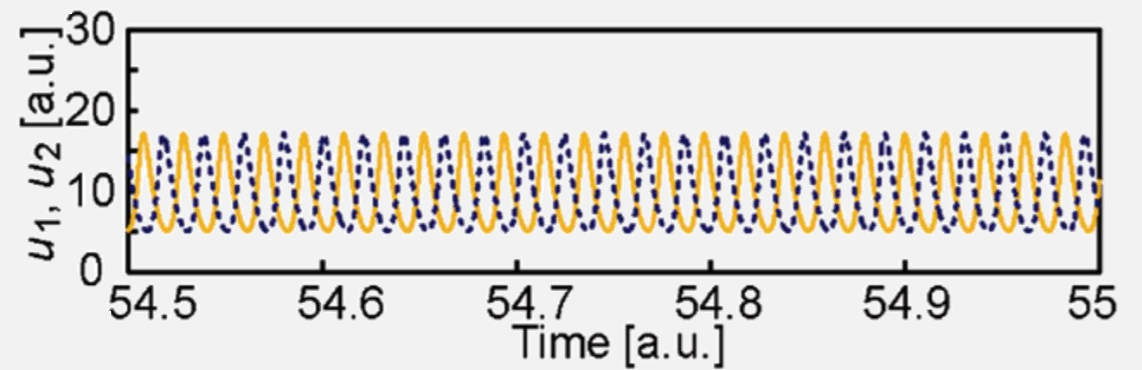


2.4 耦合的原因是什么

其振动图像为



同相



反相



中山大學

SUN YAT-SEN UNIVERSITY

Part.03

实验检验



3.1 合理性分析



纸挡板实验

验证仅有气流没有辐射无法耦合



保鲜膜实验

验证仅有辐射没有气流可以耦合



照镜子实验

验证仅有辐射没有气流可以耦合

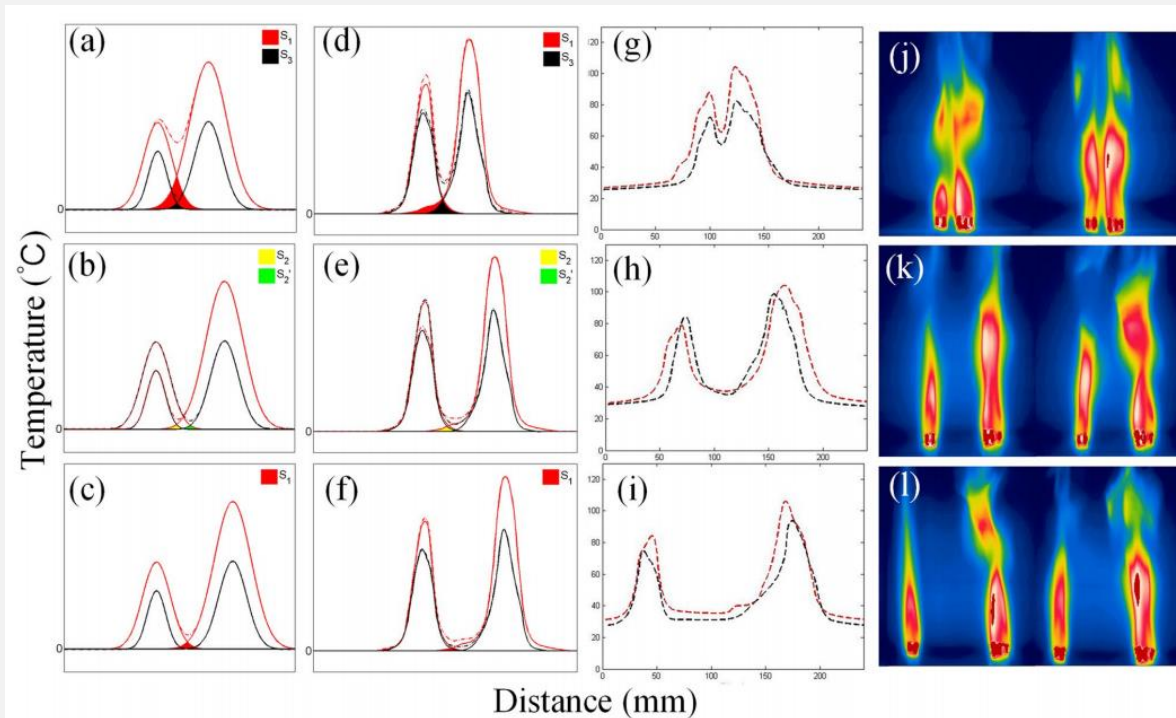
这些因素均可在近似方程中找到对应作用项，从而得出符合实验事实的定性结果

$$C \frac{dT_i}{dt} = h(T_0 - T_i) + An_{\text{石蜡}} n_{\text{氧气}i} e^{-\frac{E}{RT}} \Lambda + A_{\text{火焰}} \phi \epsilon \sigma (T_0 + \frac{\mu}{L^2} T_j^4 - T_i^4)$$

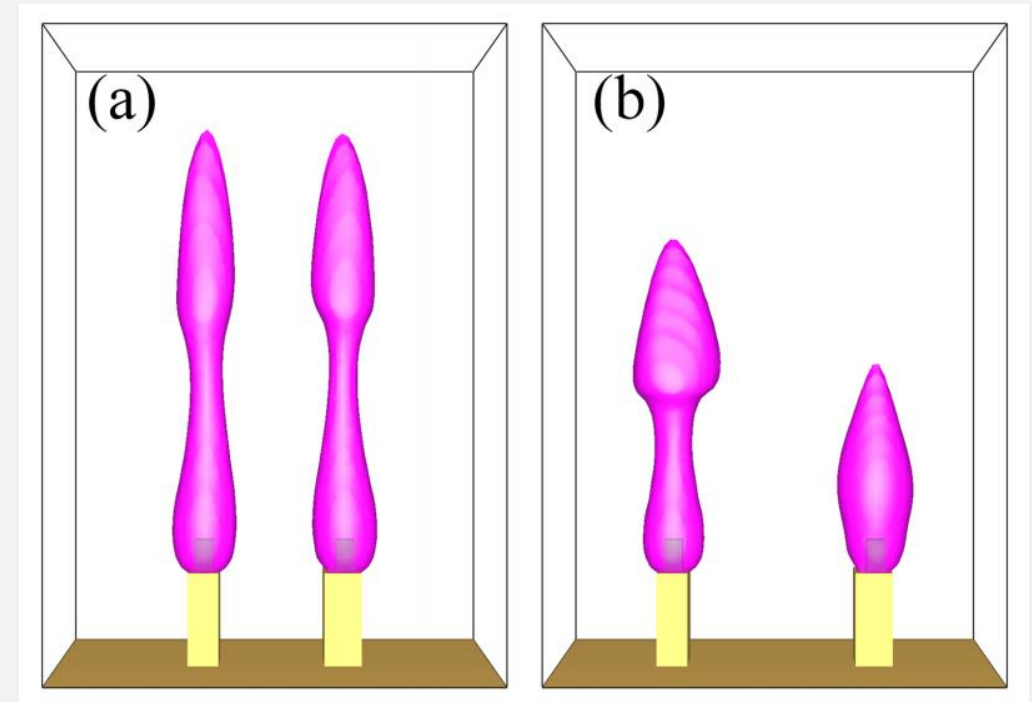
$$\frac{dn_{\text{氧气}i}}{dt} = k(n_0 - n_{\text{氧气}i}) - Bn_{\text{石蜡}} n_{\text{氧气}i} e^{-\frac{E}{RT_i}}$$

3.1 合理性分析

对于双振子系统，可以在他人的仿真中得到实验检验



有效辐射的唯象理论



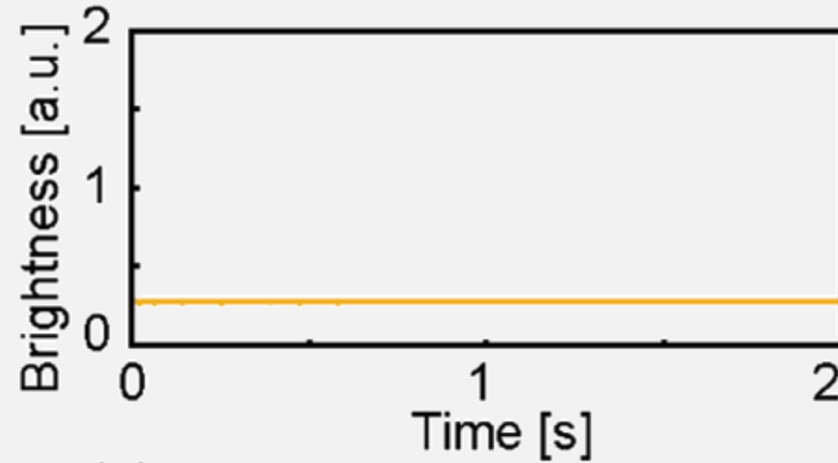
仿真



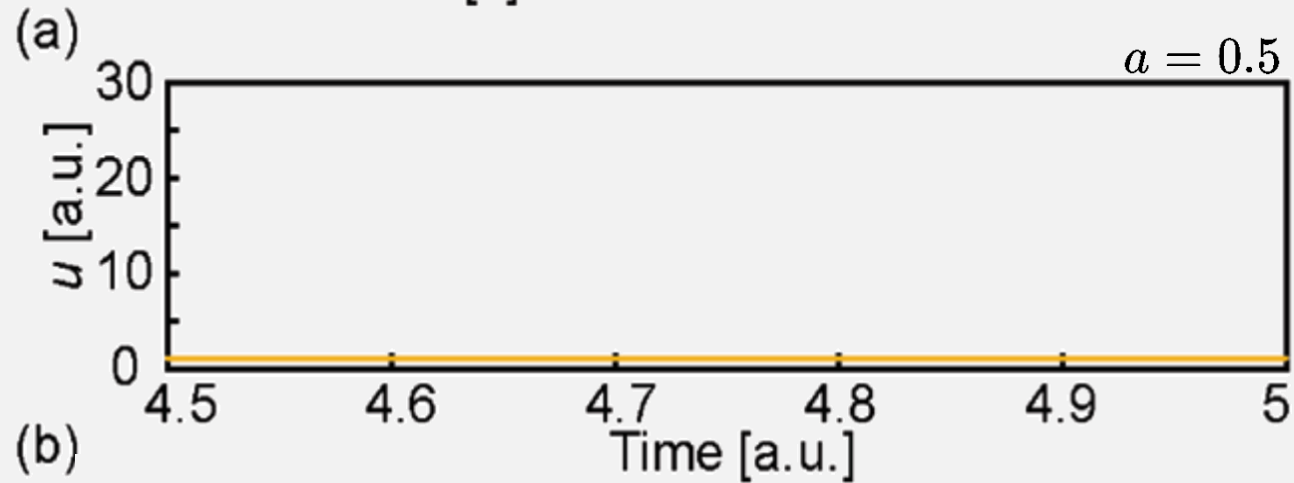
3.2 精确性分析

近似方程的数值模拟

实验数据



数值模拟

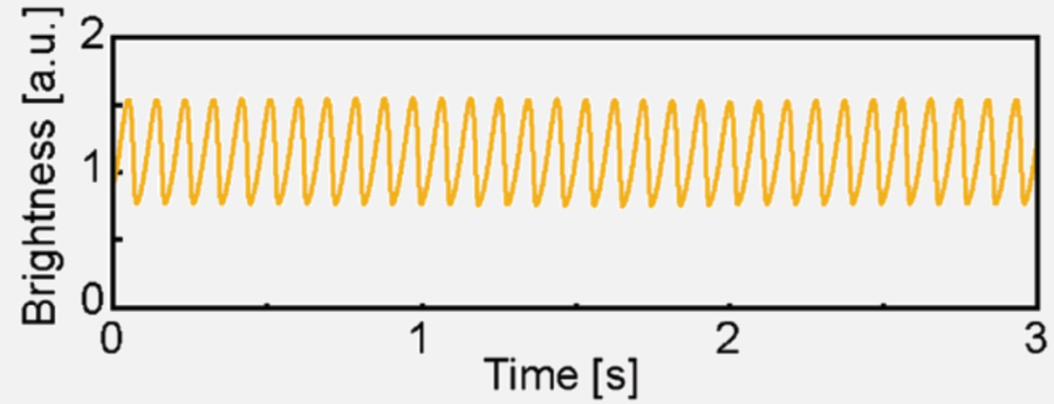




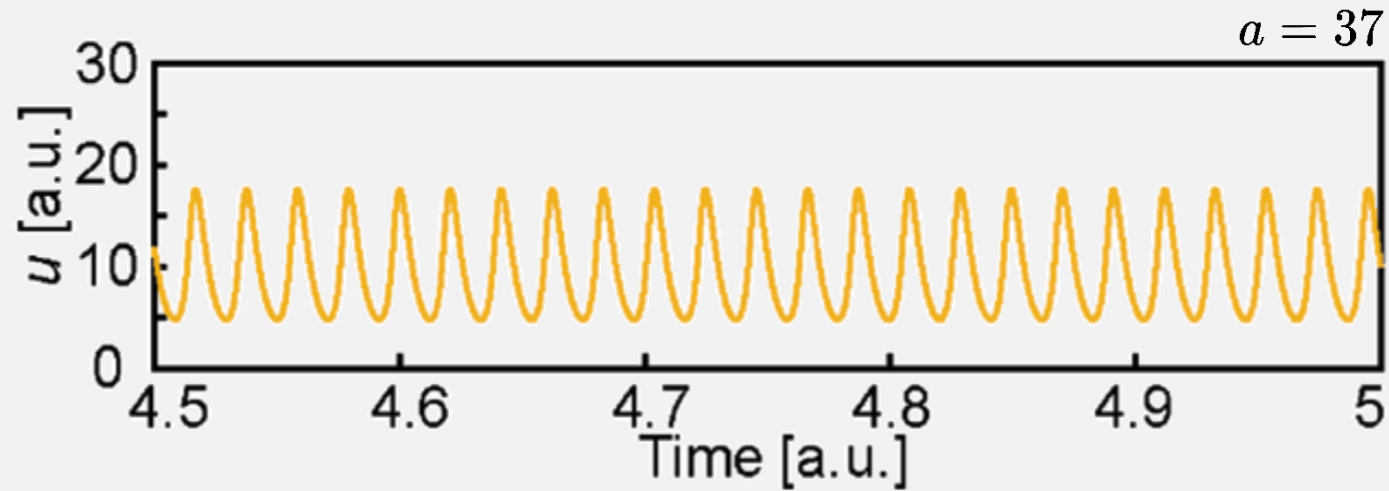
3.2 精确性分析

近似方程的数值模拟

实验数据



数值模拟

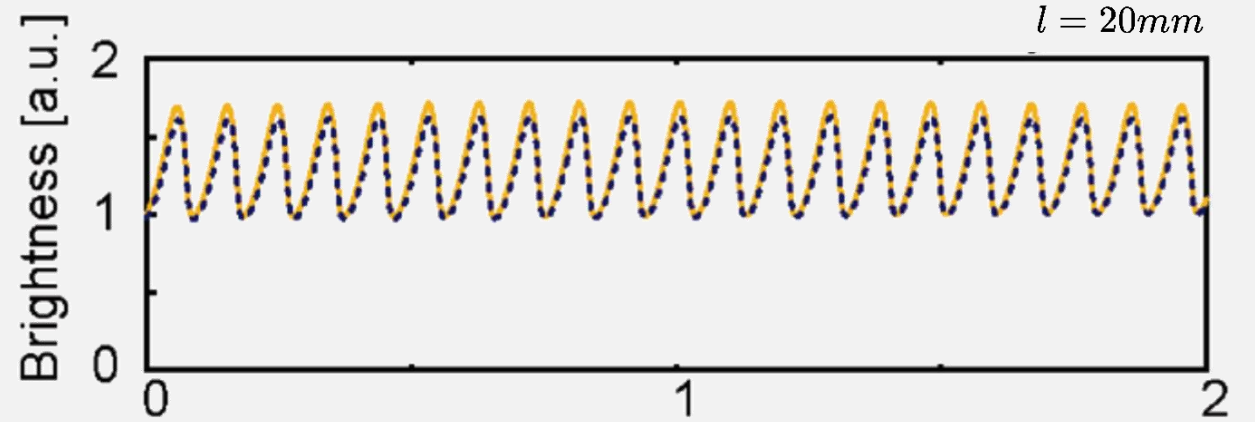




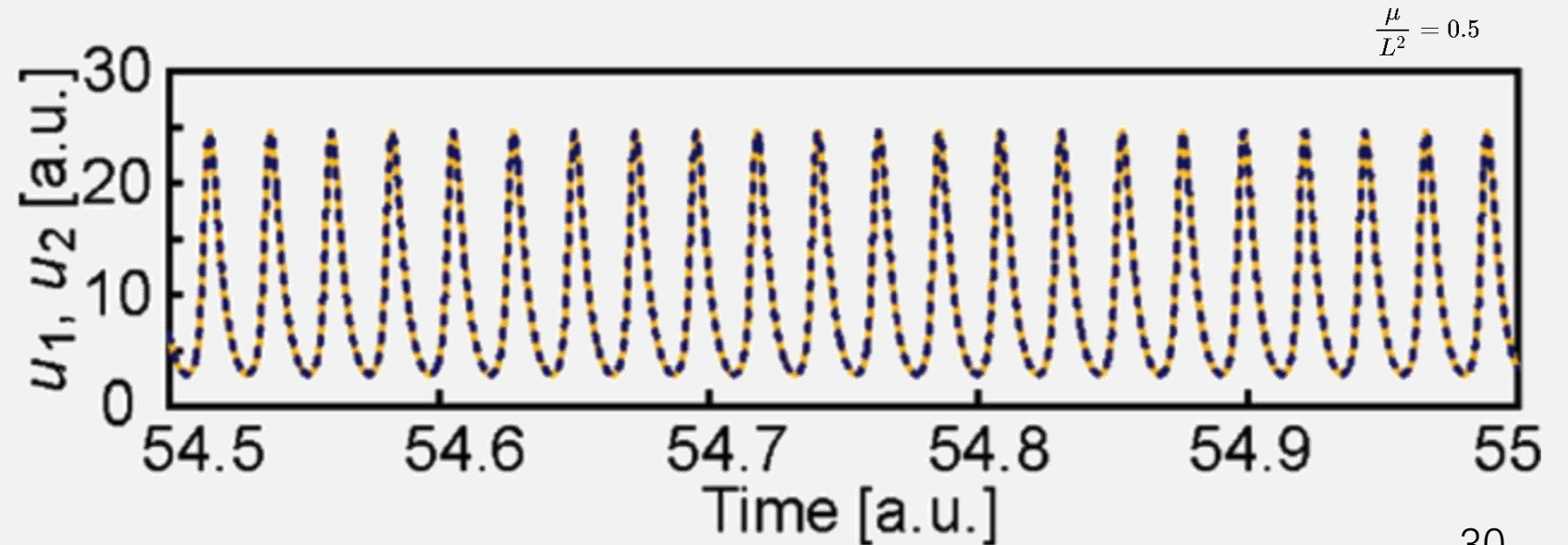
3.2 精确性分析

近似方程的数值模拟

实验数据



数值模拟



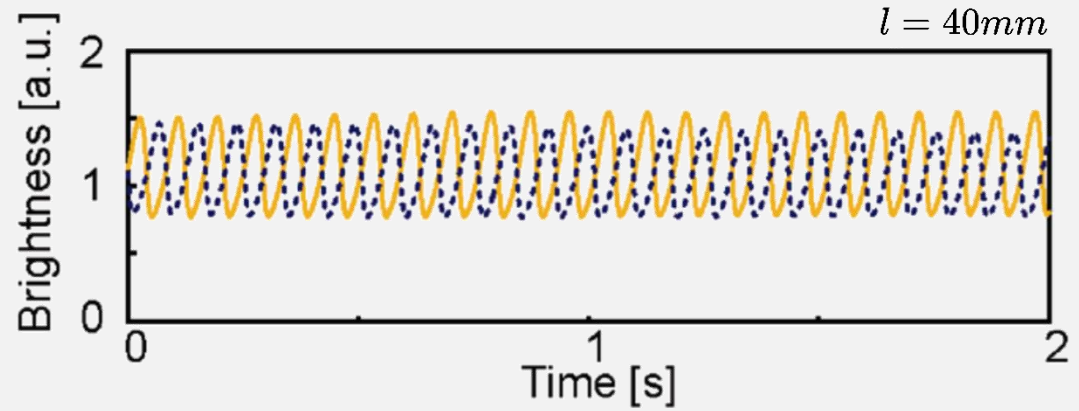
[1] H. Kitahata, J. Taguchi, M. Nagayama, T. Sakurai, Y. Ikura, A. Osa, Y. Sumino, M. Tanaka, E. Yokoyama, H. Miike, Oscillation and synchronization in the combustion of candles, The Journal of Physical Chemistry A 113(29) (2009) 8164-8168.



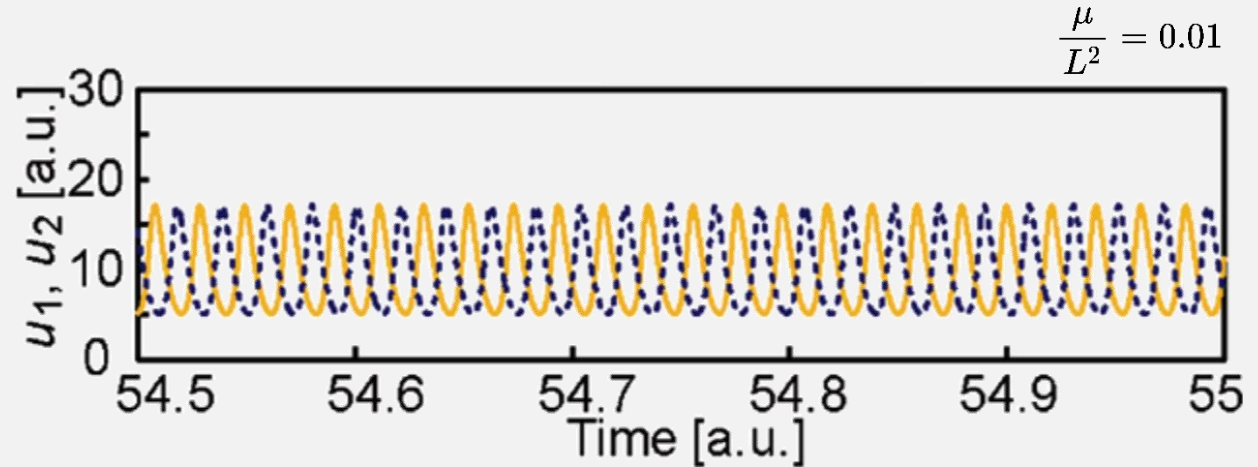
3.2 精确性分析

近似方程的数值模拟

实验数据



数值模拟

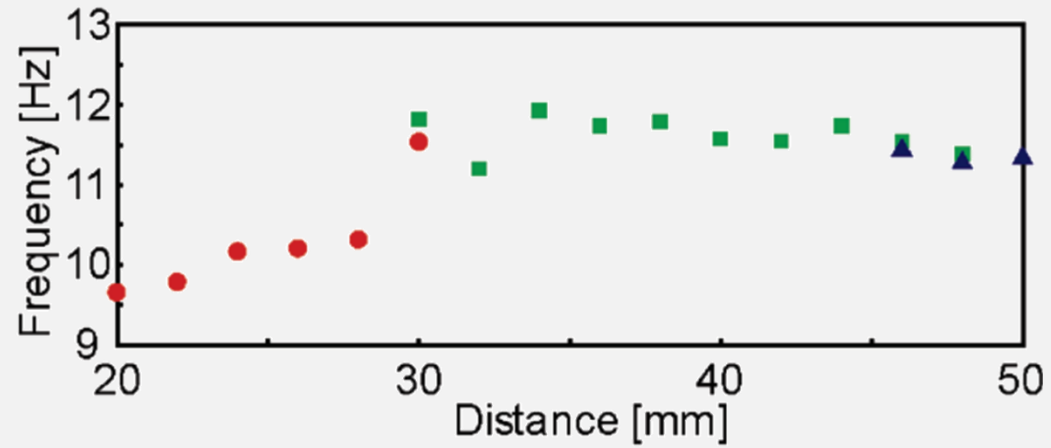




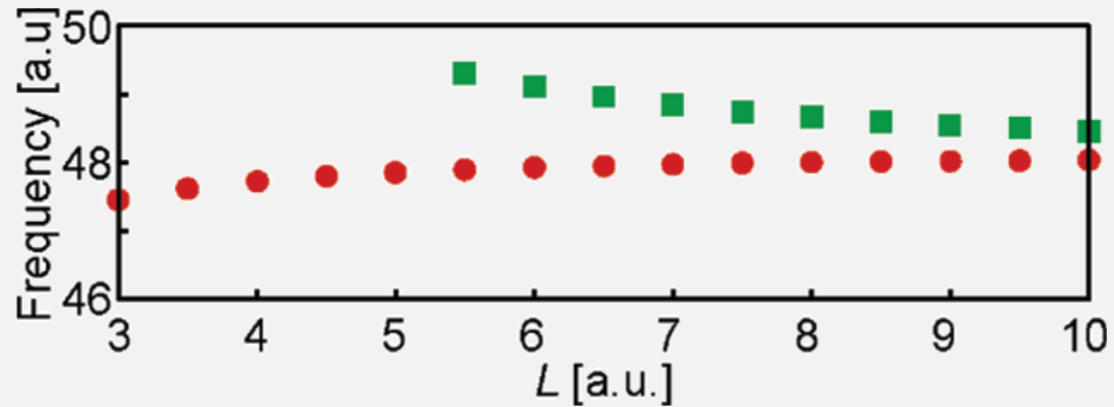
3.2 精确性分析

近似方程的数值模拟

实验数据



数值模拟





3.2 精确性分析

普适理论

$$C(T) \frac{dT}{dt} = P_{\text{对流}}(T) + P_{\text{燃烧}}(T) + P_{\text{辐射}}(T)$$

近似方程

$$C \frac{dT_i}{dt} = h(T_0 - T_i) + An_{\text{石蜡}} n_{\text{氧气}i} e^{-\frac{E}{RT}} \Lambda + A_{\text{火焰}} \phi \epsilon \sigma (T_0 + \frac{\mu}{L^2} T_j^4 - T_i^4)$$

$$\frac{dn_{\text{氧气}i}}{dt} = k(n_0 - n_{\text{氧气}i}) - Bn_{\text{石蜡}} n_{\text{氧气}i} e^{-\frac{E}{RT_i}}$$

结论：

对于**双振子**的耦合系统，该近似方程可以得到较好的半定性半定量结果

局限性：

近似程度较大，无法对现象进行精确的定性描述
对于多耦合系统，可能误差较大

然而，这种局限性应当辩证地看待。若过分追求精确的仿真，反而失去的抽象模型的物理效用，更失去了研究意义。物理建立模型应当以目的为导向——应当注意的是，对于三大首要问题，这或许已经是最好的解答。



中山大學

SUN YAT-SEN UNIVERSITY

Part.04

研究展望和总结



4.1 研究展望和总结

多振子系统

验证多振子系统是否能被近似模型较好描述

非平衡过程

对于开始振动前的弛豫过程、振动模式转化的弛豫过程，我们还需要新的模型进行描述。



研究展望

对流项修正

从研究现状可见，气流涡旋等作用对火焰振动和振动耦合仍有相当大的影响，这些影响将体现在对流项中，我们的近似方程采用了非常简化的模型。

蜡烛的群体行为

MORE IS DIFFERENT. 对有限振子的系统的精确度吹毛求疵意义不大，蜡烛的群体行为也需要新的模型来描述。我们这里仅仅只是解决了三大首要问题。



4.2 思路总结

同步蜡烛的半定性半定量研究

研究背景

现象：单株振动、多株耦合

研究现状：方向多而乱、焦点问题尚未达成一致、**三大首要问题**待解决

建立模型

定性实验表明：耦合的原因是热辐射

普适理论：振子是温度，振动的原因是温度的变化率是温度的函数

简化模型：取合理近似，写出温度、氧气浓度的微分方程，无量纲化处理

实验检验

定性实验、仿真实验确保其合理性

对**近似方程数值模拟**能够很好的描述双振子系统的半定性半定量性质

辩证看待局限性

研究展望

对近似方程适用范围的进一步确定、合理修正

非平衡过程

蜡烛振动的群体行为



中山大學

SUN YAT-SEN UNIVERSITY

Part.05

附录



5.2 几何角系数

A_f' ——圆柱形火焰圆周面的面积, m^2 ;

r ——火焰的半径, m ;

h ——火焰的高度, m ;

N ——假定的总能束数。

ϵ ——表面辐射率;

σ ——Stefan-Boltzman常数, $5.67 \times 10^{-8} W/m^2K$;

T ——表面温度, K 。

由式 (1.2) 代入式 (1.1) 可得:

$$q = \epsilon \sigma T^4 \frac{S_1 2rh}{N(r_2^2 - r_1^2)} = \epsilon \sigma T^4 \phi \quad (13)$$

其中: $\phi = \frac{S_1 2rh}{N(r_2^2 - r_1^2)}$, 几何角系数。

4.2 圆锥形火焰

火焰辐射模型:

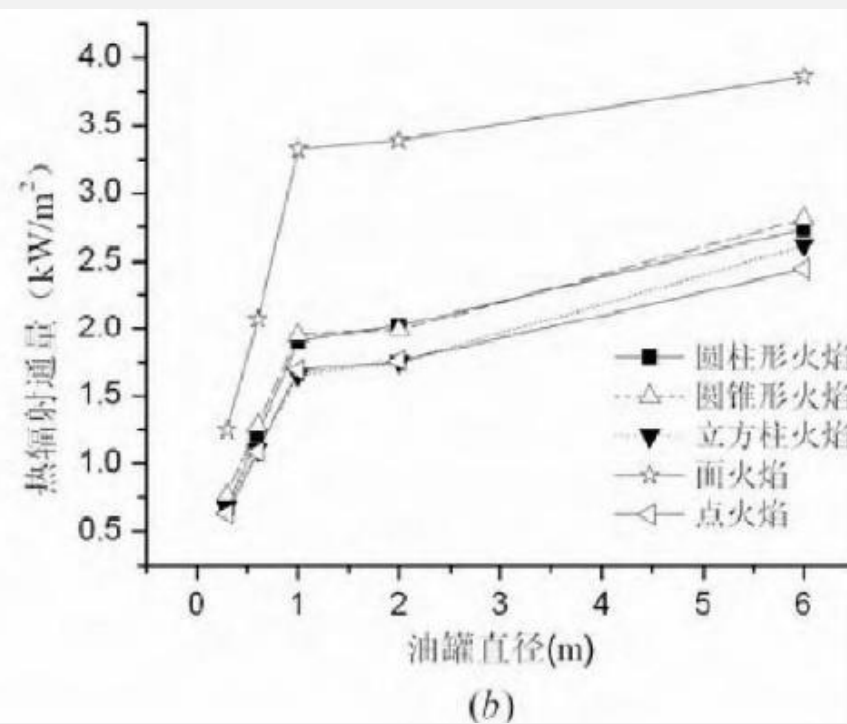
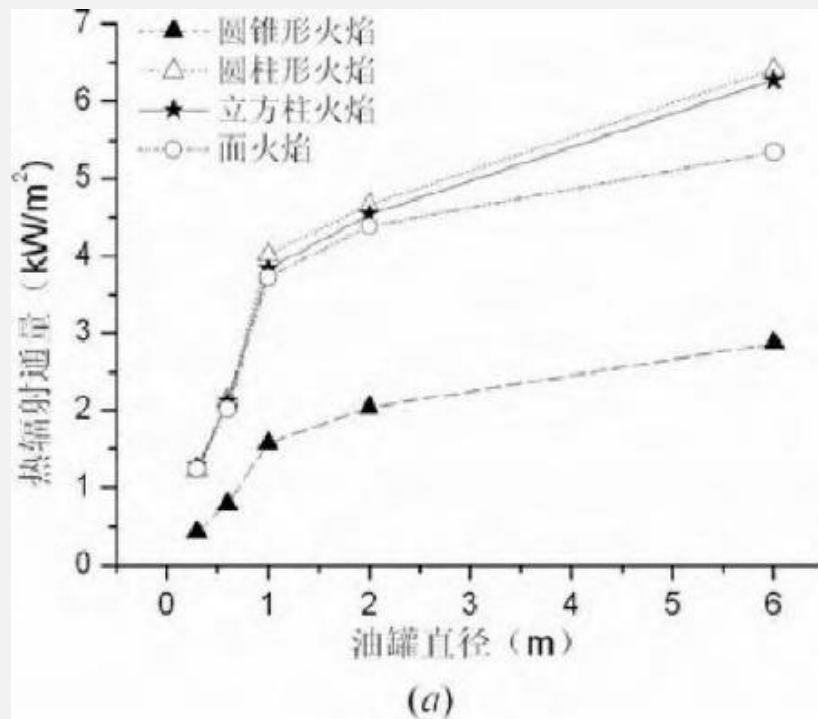
- (1) 假定火焰形状为圆锥形; (2) 由于火焰的主要辐射成分是辐射光谱的固体微粒, 而气体辐射能力相对较小, 所以将火焰作为近似的灰体处理;
- (3) 整个火焰热辐射假定为整个圆锥表面的对外辐射;
- (4) 假定微元面为 $dr=0.2m$ 的圆环面。
- (5) 火焰为静态火。

当火焰的热辐射通量采用式 (8) 计算时, 圆锥形火焰的热辐射通量为:

$$q = \epsilon \sigma T^4 \frac{S_1 r \sqrt{r^2 + h^2}}{N(r_2^2 - r_1^2)} = \epsilon \sigma T^4 \phi \quad (16)$$

其中: $\phi = \frac{S_1 r \sqrt{r^2 + h^2}}{N(r_2^2 - r_1^2)}$, 几何角系数。

5.3 火焰形状





5.4 辐射项修正

$$\varepsilon = 1 - \exp(-KL) \quad (13)$$

式中 K 为有效发射系数，当炭颗粒直径大大小于辐射波长时（大多数情况波长 $\lambda > 10^3 \text{nm}$ ），其正比于火焰中炭颗粒的体积分数和辐射温度^[7]，即：

$$k = 3.72 \frac{C_0}{C_2} f_r T_f \quad (14)$$

式中 C_0 为 2~6 之间的常数， C_2 为 Plank 第二常数，其值为 $1.4388 \times 10^{-2} \text{m} \cdot \text{K}$ 。而火焰平均射线行程长度 (L) 可用以下经验公式计算得到令人满意的近似结果^[8]：

$$L = 3.6V_f/A_f \quad (15)$$

若已知空气供应质量流率 m_{air} 和燃烧面积 A_v (或燃料床直径 D)，将式(5)、(8)、(13)同时代入式(3)，则可建立关于平均火焰辐射温度 T_r 和通风系数 Φ 的隐式方程。迭代求解即可得到 T_r 随 Φ 的变化。

$$f_r = \frac{\eta_s \dot{m} k_s}{\rho_s V_f} \quad (9)$$

其值一般约为 10^{-6} 量级，式中炭颗粒密度 ρ_s 值取为 1100kg/m^3 ^[5]。式(7)、(8)、(9)中燃烧效率 (χ_A)、辐射放热系数 (χ_R) 和炭颗粒生成效率 (η_s) 均为通风系数的函数。受限燃烧中通风对燃烧效率、辐射放热系数和炭颗粒生成效率的影响可分别用以下关系式定量描述^[6, 9]。即：

$$\chi_A = \chi_{A0}(1 + \Gamma_A) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \chi_R &= \chi_A - \chi_C \\ &= \chi_{A0} - \chi_{C0} + \chi_{A0}\Gamma_A - \chi_{C0}\Gamma_C \\ &= \chi_{R0} + \chi_{A0}\Gamma_A - \chi_{C0}\Gamma_C \end{aligned} \quad (11)$$

$$\eta_s = \eta_{s0}(1 + \Gamma_s) \quad (12)$$

式中 $\Gamma_i = \alpha_i \text{EXP}(-\beta_i \Phi^{-\psi_i})$ 定义为通风控制燃烧因子， $i = A, C, S$ ，常数 α_i 、 β_i 、 ψ_i 以及部分典型聚合物的 χ_{A0} 、 χ_{C0} 和 η_{s0} 等值分别在表一、表二中给出。



5.5 参考文献



- [1] H. Kitahata, J. Taguchi, M. Nagayama, T. Sakurai, Y. Ikura, A. Osa, Y. Sumino, M. Tanaka, E. Yokoyama, H. Miike, Oscillation and synchronization in the combustion of candles, *The Journal of Physical Chemistry A* 113(29) (2009) 8164-8168.
- [2] D.M. Forrester, Arrays of coupled chemical oscillators, *Sci. Rep.* 5 (2015) 16994.
- [3] K. Okamoto, A. Kijima, Y. Umeno, H. Shima, Synchronization in flickering of three-coupled candle flames, *Sci. Rep.* 6 (2016) 36145.
- [4] Y. Nagamine, K. Otaka, H. Zuiki, H. Miike, A. Osa, Mechanism of candle flame oscillation: Detection of descending flow above the candle flame, *Journal of the Physical Society of Japan* 86(7)(2017) 074003.
- [5] T. Chen, X. Guo, J. Jia, J. Xiao, Frequency and Phase Characteristics of Candle Flame Oscillation, *Sci. Rep.* 9(1)(2019) 1-13.
- [6] K. Manoj, S.A. Pawar, R. Sujith, Experimental evidence of amplitude death and phase-flip bifurcation between in-phase and anti-phase synchronization, *Sci. Rep.* 8(1) (2018) 1-7.
- [7] T. Yang, X. Xia, P. Zhang, Vortex-dynamical interpretation of anti-phase and in-phase flickering of dual buoyant diffusion flames, *Physical Review Fluids* 4(5) (2019) 053202.
- [8] N. Fujisawa, K. Imaizumi, T. Yamagata, Synchronization of dual diffusion flame in co-flow, *Experimental Thermal and Fluid Science* 110 (2020) 109924.
- [9] K. Manoj, S.A. Pawar, S. Dange, S. Mondal, R. Sujith, E. Surovyatkina, J. Kurths, Synchronization route to weak chimera in four candle-flame oscillators, *Physical Review E* 100(6) (2019) 062204.
- [10] 李全峰. 火焰形状对其热辐射通量的影响[J]. 中国科技信息, 2010(15):40-43.
- [11] 姜冯辉, 钟奇, 聚合物燃烧火焰辐射及其温度的估算. 火灾科学, 1994年01期, 中国科学技术大学.
- [12] Drysdale, D. , A Introduction to Fire Dynamics, John Wiley and Sons, New York, NY. , 1985.



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

赛题再现和研
究背景

建立模型

实验检验

研究展望和总
结

附录



5.6 最后的话

由于各种原因，我们决定退赛。
很遗憾不能陪大家一起参加决赛和校队选拔，也祝你们后续表现顺利。



5.6 最后的话

据不完全统计，我们超越方程组是目前积分最高的队伍。
我们在之前的每一场比赛的每一阶段中（共六次）都拿到了现场最高分。
甚至拿到了两次10分。



5.6 最后的话

感谢我的队长罗俊平和我们队的队员。
也代表我们对魏文杰、李裕彤同学表示感谢。
感谢唐健老师、黄臻成老师、项泽亮老师以及其他裁判对我们的关注和指导。
感谢在比赛中遇到的所有队伍。



5.6 最后的话

希望各位在学术道路上不忘初心。
有缘再会。