

四阶蔡氏电路超混沌动力学唯象研究

余荫铠[†], 王誉晨

中山大学 物理学院, 广州 510275

摘要: 对比三阶蔡氏电路的结果, 我们建立了能够同时描述四阶蔡氏电路的混沌动力学和非混沌动力学的无量纲化理论模型, 并结合数值、仿真、实验手段观测了四阶蔡氏电路的各种动力学相, 最后我们对四阶蔡氏电路的 Lyapunov 指数谱和 Poincaré 映射的分叉图进行分析, 得到了四阶蔡氏电路的动力学相图。

关键词: 四阶蔡氏电路, 混沌动力学, Lyapunov 指数谱, 分叉图, 相轨图

1 引言

由蔡少棠提出的经典蔡氏电路 [1] 具有三个储能元件, 即, 描述电路状态的参量有三个, 是一种三阶蔡氏电路。四阶蔡氏电路相较于三阶蔡氏电路, 多加入了一个储能元件, 将电路变为四阶 [2]。四阶蔡氏电路最多可以出现两个正的 Lyapunov 指数, 此时的动力学被称为超混沌动力学 [3]。

对于四阶蔡氏电路的超混沌现象, 人 [2; 4-5]; 对于其应用, 人们也有许多研究 [6-8]。但是, 对于其各动力学行为的各相产生机理、相变机理、相图, 却未见有工作报告。事实上, 人们已经掌握了比较完善的混沌学原理 [9], 对此作出解析并非一件难事。

本文将在第2节简述四阶蔡氏电路的理论模型; 在第3节从数值、仿真、实验三个层面展示四阶蔡氏电路的几种动力学行为, 描述方法采用相轨图和 Poincaré 图; 在第4节我们基于 Lyapunov 指数谱以及分叉图给出第3节几种动力学相产生的唯象机理。

2 基于蔡氏电路的四阶混沌模型

2.1 经典蔡氏电路

经典蔡氏电路的电路图如图1所示, 它是一种三阶蔡氏电路。经典蔡氏电路的电路方程为

$$\begin{cases} C_1 \frac{du_1}{dt} = -\frac{u_1 - u_2}{R} - f(u_1) \\ C_2 \frac{du_2}{dt} = \frac{u_1 - u_2}{R} + i_L \\ L_0 \frac{di_L}{dt} = -u_2 \end{cases} \quad (1)$$

其中 u_1, u_2 分别表示 C_1, C_2 上的电压。 $f(u_1)$ 是非线性电阻的伏安特性函数。混沌电路的混沌现象来源于非线性电阻, 不同形式的非线性电阻导致了各种各样的混沌现象。关于非线性电阻诱导的混沌相产生机理, 我们在下一小节详述。

经典蔡氏电路作为最简单的混沌电路, 已经可以产生许多典型的混沌现象, 如单吸引子、双吸引子等, 我们在数值 (相关代码见附录B.5)、仿真、实验三个层面将其 u_1-u_2 相轨图呈现在图2中。

经典蔡氏电路的相轨图是三维的, 除了图2展示的两个维度外, 其实还可以观察另外两个维度的相轨, 如图3所示。

2.2 非线性电阻诱导的混沌动力学

四阶蔡氏电路与经典蔡氏电路使用相同的非线性电阻, 即分段线性电阻, 其伏安特性曲线如

[†]余荫铠: yuyk6@mail2.sysu.edu.cn

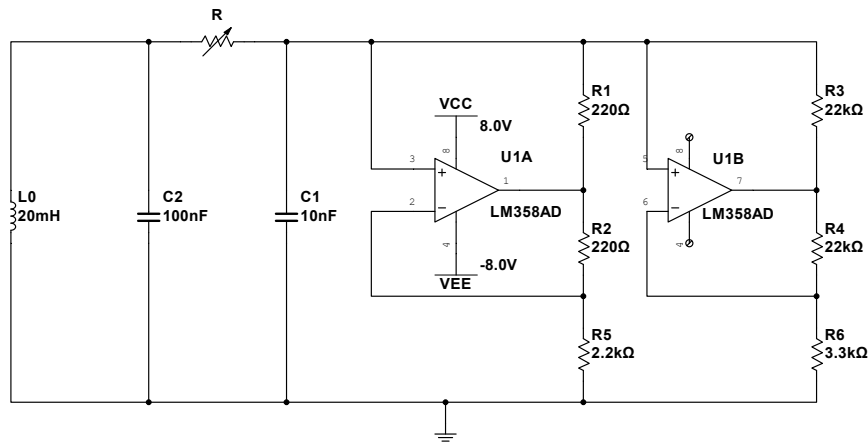


图 1 经典蔡氏混沌电路的电路图

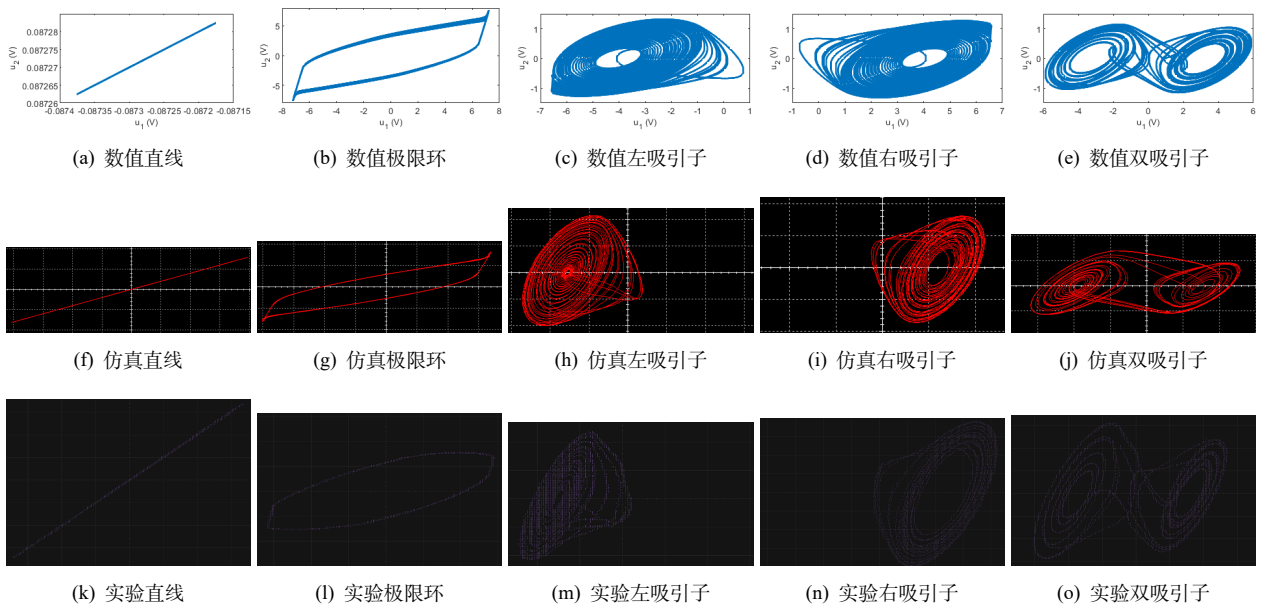
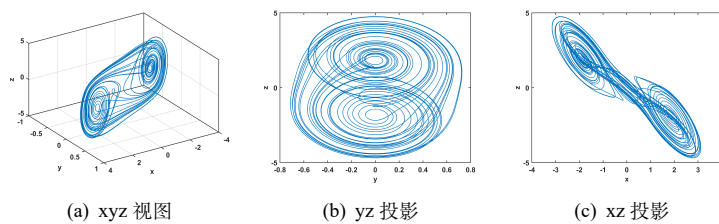
图 2 经典蔡氏混沌电路的 u_1 - u_2 相轨图

图 3 经典蔡氏电路的双吸引子相轨图 (不同视角)

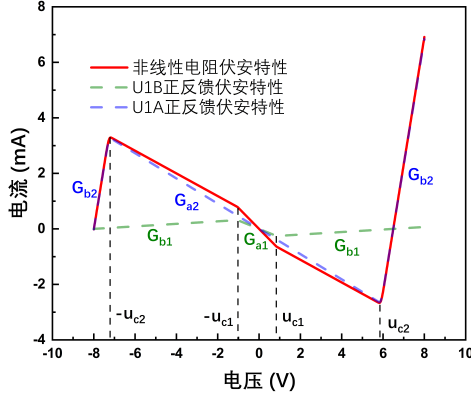


图4 非线性电阻伏安特性

图4所示。分段线性电阻由两个基于运放的正反馈回路并联而成。对于正反馈回路¹，其伏安特性为

$$I_{Ni} = f_i(u_1) = G_{bi}u_1 + \frac{1}{2}(G_{ai} - G_{bi})(|u_1 + U_{ci}| - |u_1 - U_{ci}|) \quad (2)$$

其中 G_{ai} 是内区间电导， G_{bi} 是外区间电导。区间的转折是由失真决定的。在我们的电路中 $R_1 = R_2 = 0.22 \text{ k}\Omega$ ， $R_3 = R_4 = 22 \text{ k}\Omega$ ， $R_5 = 2.2 \text{ k}\Omega$ ， $R_6 = 3.3 \text{ k}\Omega$ ，运放 U1B 的电压负反馈放大倍率达到 $1 + R_4/R_6 = 7.67$ 倍，比放大倍率为 $1 + R_2/R_5 = 1.1$ 的 U1A 更快达到饱和，因此当电压 $|u_1|$ 大于阈值 $U_c = VCC/(1 + R_4/R_6) = 1.04 \text{ V}$ 时运放 U1B 饱和。

表1 正反馈回路伏安特性参量表

参量名	拟合值
G_{a1}	-0.30298 mS
G_{b1}	0.04545 mS
G_{a2}	-0.45420 mS
G_{b2}	4.54249 mS
u_{c1}	0.96 V
u_{c2}	6.505 V

我们可以在仿真或者实验中拟合出两个正反馈回路的区间动态电导以及转变电压，结果如表1所示。由于电路不可能完全对称，其实伏安

特性也不是完全对称的，我们在数值计算中把它们拟合为理想的对称函数，对于两侧不一致的拟合值，我们取平均处理。

于是，就可以表示出非线性电阻的伏安特性

$$I_N = f_1(u_1) + f_2(u_1) \quad (3)$$

这是有五个区间的分段函数。

正反馈电路在不失真的情况下，相当于线性正电阻，会放大电路中的振荡，辅以特定的 RLC 电路构成的选频器，就可以控制电路振荡的频率，产生特定频率的信号。而失真之后的运放很快表现为负电阻，则会抑制电路中的振荡，于是产生的信号振幅就会被限定在有限值。这是单个正反馈回路就可以做到的，这种非线性转变诱导的是非混沌的动力学。当然，这种自激振荡产生的信号还是在频谱上有一定展宽的，不是严格的周期信号。

将两个正反馈电路并联后，如图4，则会出现当电压较小的转变点之后，电阻在很大范围内仍是负电阻，仍会激发振荡，但是由于非线性转变点的存在，会根据电路的瞬时状态反馈不同的相移，从而导致了混沌动力学行为的发生。

所以，在图4中，内转变点 $\pm u_{c1}$ 控制的是混沌动力学行为；外转变点 $\pm u_{c2}$ 控制的是非混沌动力学行为。

2.3 四阶蔡氏电路

四阶蔡氏电路的电路图如图5所示。非线性电阻不变，只是把振荡回路改成了四阶。据此我们写出电路方程四阶蔡氏电路的基尔霍夫方程

$$\begin{cases} C_1 \frac{du_1}{dt} = -\frac{u_1 - u_2}{R} - f(u_1) \\ C_2 \frac{du_2}{dt} = \frac{u_1 - u_2}{R} + i_L \\ C_3 \frac{du_3}{dt} = -\frac{u_3}{R_0} - i_L \\ L_0 \frac{di_L}{dt} = -u_2 + u_3 \end{cases} \quad (4)$$

其中 u_1, u_2, u_3 分别表示 C_1, C_2, C_3 上的电压。为了研究的普适性，我们将方程无量纲化无量纲化

$$x = \frac{u_1}{U_c} \quad y = \frac{u_2}{U_c} \quad z = \frac{i_L R}{U_c} \quad w = \frac{u_3}{U_c} \quad (5)$$

$$\tau = \frac{t}{RC_2} \quad \alpha = \frac{C_2}{C_1} \quad \beta = \frac{R^2 C_2}{L_0} \quad (6)$$

¹在许多文章包括中山大学基础物理实验教学团队提供的讲义[10]中，都没有给出非线性电阻的完整伏安特性表达式（分五段），而是只给了较小电压区间的表达式（分三段）。他们的理由或许在于，只有内转折点 u_{c1} 是控制混沌动力学的，而外转折点 u_{c2} 是控制非混沌动力学的，对于他们所研究的混沌情形而言，不需要设计到外转折点。但是他们的数值计算结果中又往往给出相轨直线或极限环这类非混沌动力学行为，这意味着他们的结果与理论是不闭环的。虽然只是很小的表述问题，但是仍然涉及到相当重要的学术原则，不可不重视。

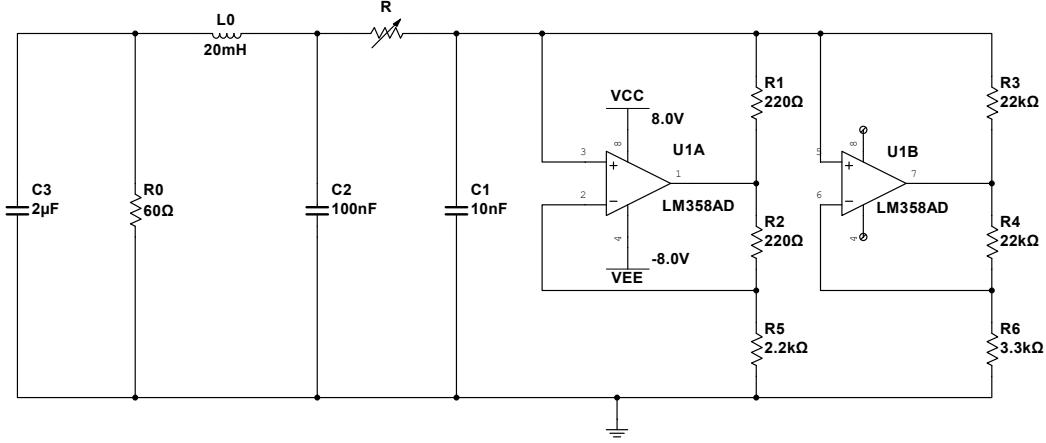


图 5 四阶蔡氏混沌电路的电路图

$$\gamma_1 = \frac{R}{R_0} \quad \gamma_2 = \frac{C_2}{C_3} \quad (7)$$

得

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -\alpha [x - y + h(x)] \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta (y - w) \\ \frac{dw}{d\tau} = -\gamma_2 (z + \gamma_1 w) \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$h(x) = m_{a1}x + \frac{1}{2}(m_{a1} - m_{b1})(|x + 1| - |x - 1|) + m_{a2}x + \frac{1}{2}(m_{a2} - m_{b2})(|x + c| - |x - c|) \quad (9)$$

$$m_{ai} = RG_{ai}, \quad m_{bi} = RG_{bi}, \quad c = \frac{U_{c2}}{U_{c1}} \quad (10)$$

写成线性方程的形式（其实不是线性的），即

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \alpha\mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & y & z & w \end{pmatrix}^T \quad (12)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\alpha(1+m) & +\alpha & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\gamma_2 & -\gamma_1\gamma_2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

这里的 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 就是该自治系统的 Jacobi 矩阵。而 $m(x)$ 和 $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 都是容易计算的分五段线性函数，这里暂略不写，详见附录B.3的数值计算代码。

3 虚实结合的混沌现象观察

3.1 实验方法

这部分的实验方案大部分参考了中山大学基础物理实验教学团队的讲义 [10]。在数值计算中，我们根据上一节建立的理论方程，基于 matlab 提供的四阶 Runge-Kutta 算法进行微分方程的数值求解（如图6a）。相关代码见附录B.7，大部分算法参考了 [9]。

仿真实验是基于 NI Multisim 仿真软件实现的，我们按照图5所示的电路图搭建仿真电路，在示波器中观察四阶蔡氏电路的相轨图（如图6b）。

在实验的观测中，我们用面包板搭建了四阶蔡氏电路，如图6c 所示。使用 NI VirtualBench-8012 一体化仪器对电路进行测量和控制。

3.2 几种混沌行为

调节电路参数 R ，可以观察到四阶蔡氏电路的不同动力学行为。

在连续改变电路参数 R 时，电路的动力学状态不是连续变化的，而是会出现某些临界的 R 的取值，在其两侧四阶蔡氏电路呈现完全不同的行为。四阶蔡氏电路有四个状态参量，故其完备的相轨图是四维的。我们取其二维 (x - y) 投影，也可以区分四阶蔡氏电路的不同动力学行为，它们有的是混沌的，有的不是。在图7中，我们给出了几种典型的相轨图数值、仿真、实验比对。每一列代表一种不同的相。由于四阶蔡氏电路的混沌行为时初值敏感的，在数值、仿真、实验中我们不可能控制初值完全一致，也可能控制电路参数完全一致，因此相轨图也不是完全相同的，但是至少对于同一种相而言，相轨图有相同的拓扑结构。

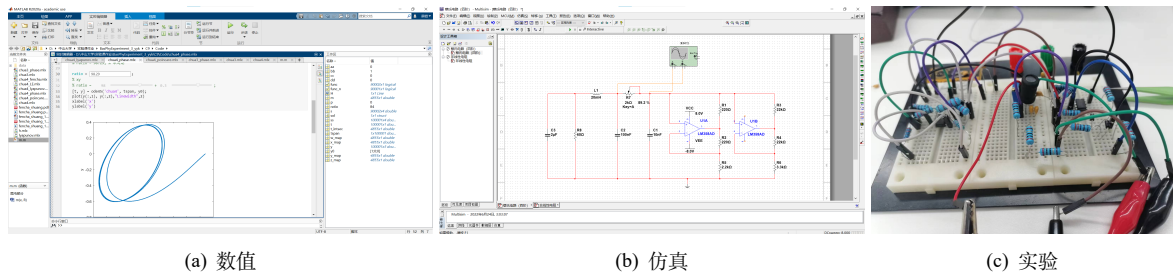


图 6 虚实结合的实验方法

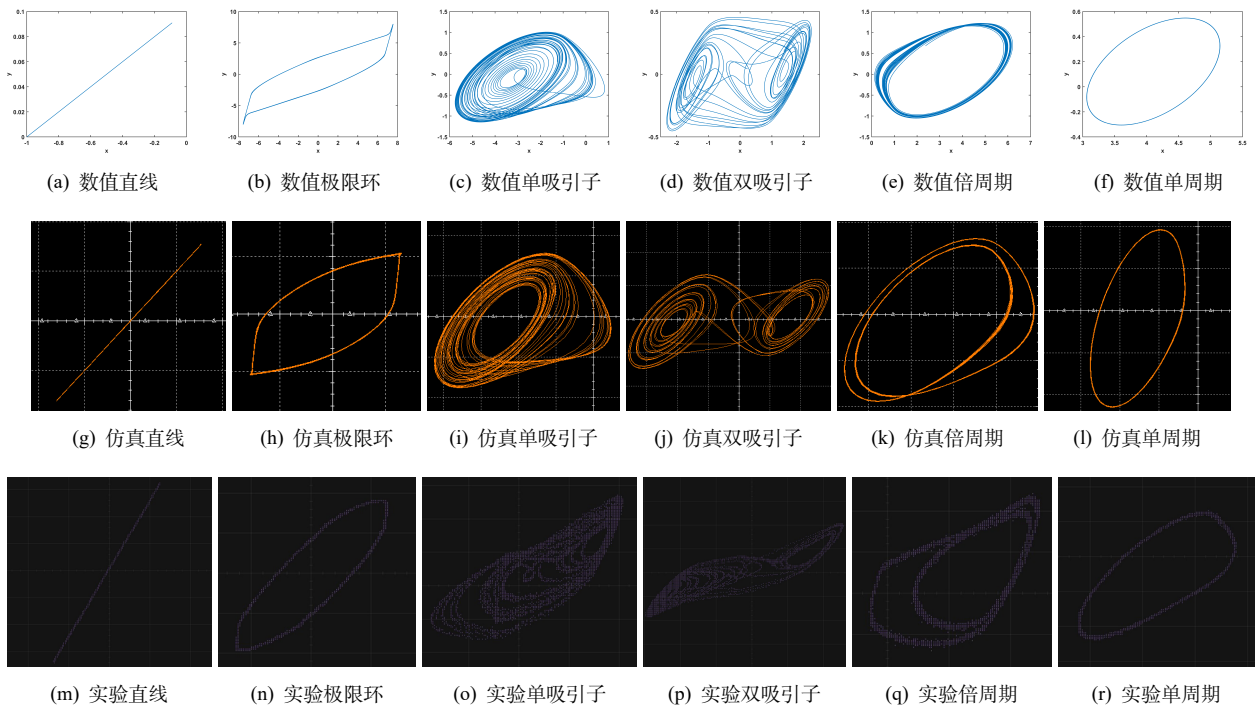


图 7 四阶蔡氏混沌电路的 x - y 相轨图

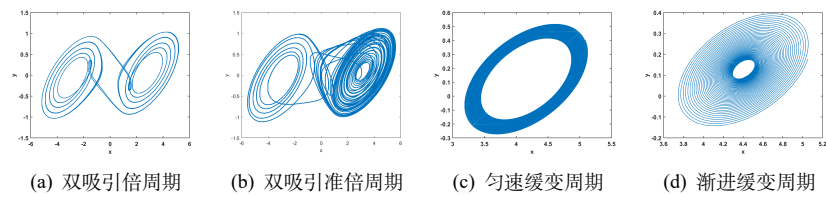


图 8 几种实验上没有观测到的相

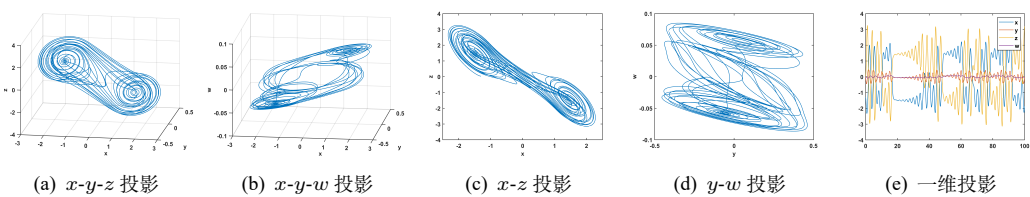
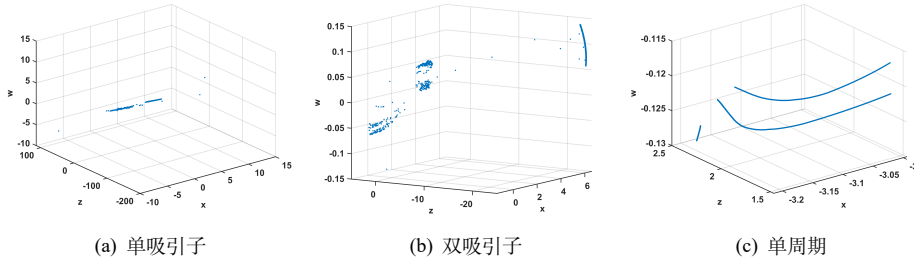


图 9 相轨图的不同维度投影

图 10 Poincaré 截面取 $y = 0$ 的 Poincaré 映射

四阶蔡氏电路的动力学相变对电路参数 R 的取值是敏感的，有一部分动力学相只有当 R 在一个很小的范围内取值时才会看到，而且这个范围还与电路状态的初值有关，甚至对于某些初值而言，有些相是不存在的。这就给我们的实际实验的观测造成了一定的困难，有一些相是很难在实验中观测到的。这一些相在数值计算中是很容易观测的，我们在图8展示了几种实验上没有观测到的相，呈现方式依然是相轨图的 x - y 平面投影。

当然，除了 x - y 平面投影之外，我们也可以在其他维度描述四阶蔡氏电路的相轨。如图9所示，我们展现了双吸引子的相轨在不同维度的投影。它们仅仅平凡地展现了相轨在不同维度的投影，有助于我们理解相轨的四维拓扑结构。

Poincaré 映射也是分析动力学系统常用的工具 [9]。在图10中，我们给出了几种典型混沌相的 Poincaré 映射，计算代码见附录B.8。

总而言之，我们发现四阶蔡氏电路有这样几种动力学相，我们按照相轨的形态来命名：直线相、极限环相、单涡旋相、双涡旋相、倍周期相、单周期相、双吸引倍周期相、双吸引准周期相、匀速缓变周期相、渐进缓变周期相等。

4 动力学相图与唯象解释

Lyapunov 指数可以表征系统运动的特征，它沿某一方向取值的正负和大小，表示长时间系统在吸引子中相邻轨道沿该方向平均发散或收敛的快慢程度 [11]。因此，最大 Lyapunov 指数决定轨道覆盖整个吸引子的快慢，最小 Lyapunov 指数则决定轨道收敛的快慢，而所有 Lyapunov 指数之和可以认为大体上表征轨道平均发散或收敛的快慢。对于吸引子，必定有一个 Lyapunov 指数是负的；而对于混沌，必定有一个 Lyapunov 指数是正的。

对于混沌动力系统，Lyapunov 指数的大小与系统的混沌程度有关。假设系统从相空间中某半

径足够小的超球开始演变，则第 i 个 Lyapunov 指数定义为

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{r_i(t)}{r_i(0)} \right) \quad (14)$$

式中， $r_i(t)$ 为 t 时刻按长度排在第 i 位的椭圆轴的长度， $r_i(0)$ 为初始球半径。

要从一个自治耗散系统中产生超混沌信号，系统的状态方程必须满足以下两个基本条件：

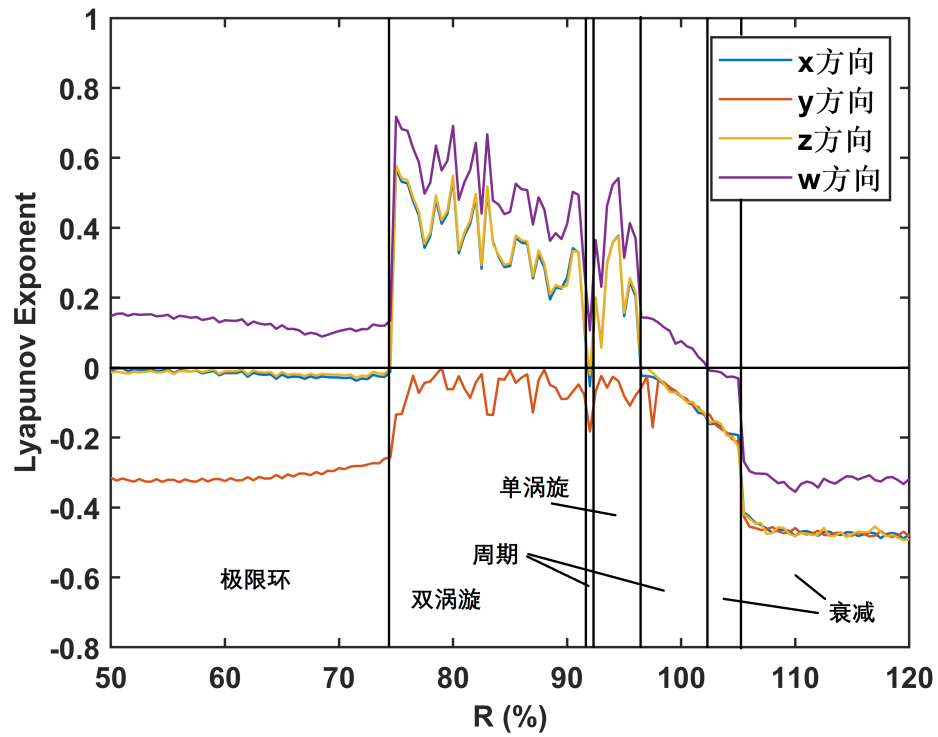
- (1) 状态方程的维数至少要四维，状态方程的阶数至少要二阶；
- (2) 系统至少有两个正 Lyapunov 指数，且满足所有 Lyapunov 指数之和小于零。

我们使用主流的 Wolf 算法 [11] 求解该自治耗散系统四阶蔡氏混沌电路的 Lyapunov 指数谱，计算代码见附录B.1。分析不同电路参数对应的四个 Lyapunov 指数值就可以判断电路的混沌行为。

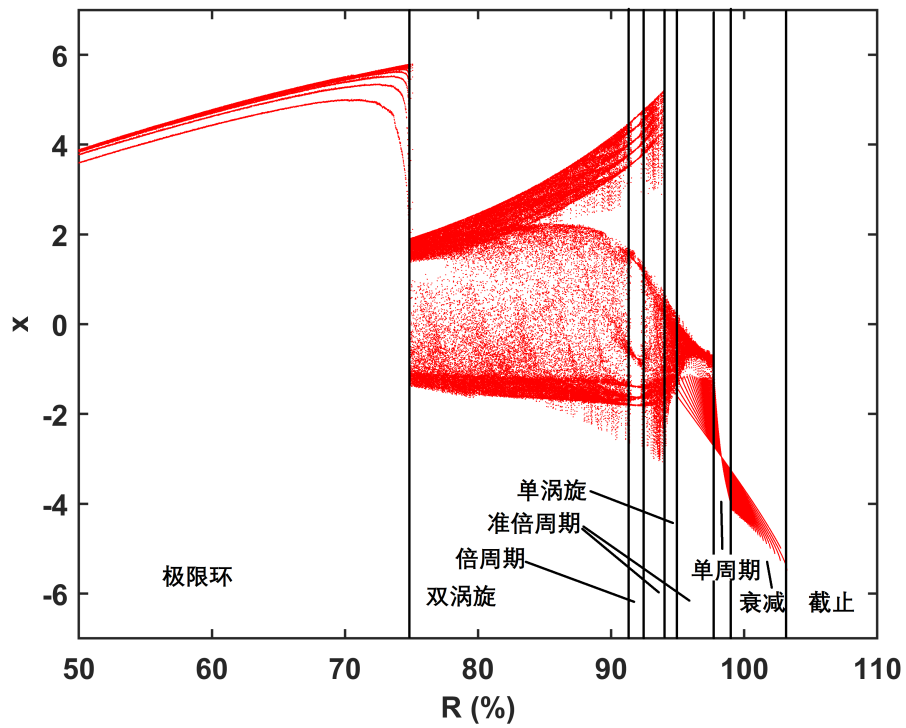
当系统参数变化时，其 Poincaré 映射在某一坐标轴上的投影可构成该参数变化时的分岔图。对于确定不变的系统参数，分岔图上一个信号点或者与系统周期数相等的几个信号点可以表示系统周期稳定的状态。而混沌图中画出的无数个点则表示出现混沌现象时存在无数个周期信号点从不落到相同的位置上。因此，在分岔图中，可以很清晰地描绘出系统性能随系统参数变化的特征。

分岔图相对于 Lyapunov 指数谱而言，是对四阶蔡氏电路的更唯象的描述。从分岔图不仅可以判断系统是否发生混沌，还可以分辨出不同的混沌行为。在求解 Poincaré 映射的基础上，我们编写了计算四阶蔡氏电路关于电路参数 R 的分岔图的程序，见附录B.9。

这种办法作出的四阶蔡氏电路相图并不是普适的，事实上，由于混沌系统的初值敏感性，利用不同初值求解出来的 Lyapunov 指数谱和分岔图也会是不同的。我们对 Lyapunov 指数谱和分岔图进



(a) Lyapunov 指数谱



(b) 分叉图

图 11 初值选取 x_{0A} 的电路状态关于电路参数 R 的动力学相图

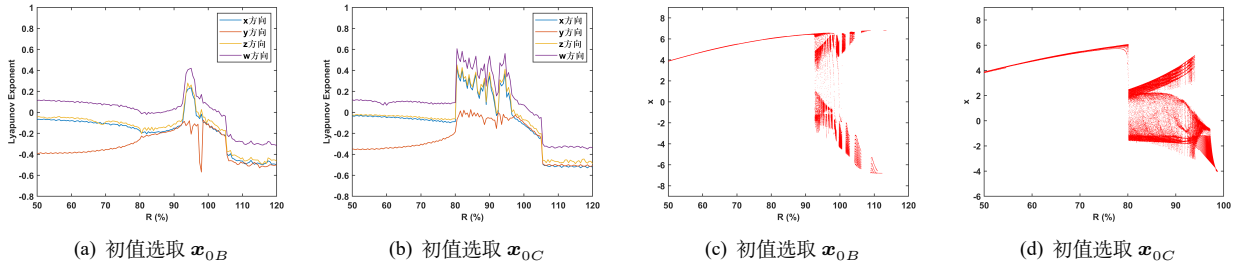


图 12 Lyapunov 指数谱与分岔图随初值的变化

行分析的意义在于，总结如何唯象地将电路的混沌行为与其 Lyapunov 指数谱和分岔图联系起来，这样我们就可以根据 Lyapunov 指数谱和分岔图来预测电路的动力学状态。

我们在数值计算中，对三种初始值进行了求解

$$x_{0A} = (-1.3 \quad -0.002 \quad -0.043 \quad -0.036)^T \quad (15)$$

$$x_{0B} = (7.0 \quad 6.4 \quad 11.3 \quad -0.41)^T \quad (16)$$

$$x_{0C} = (-6.8 \quad 0 \quad 6.6 \quad -0.18)^T \quad (17)$$

结果如图12、图11所示。其中 x_{0A} 是在双吸引子轨道中取的初值， x_{0B} 是在极限环轨道中取的初值， x_{0C} 是在单吸引子的衰减坍缩点取的初值。在电路中， R 用可变电阻实现，我们在实验中所用的可变电阻最大阻值为 $2 \text{ k}\Omega$ ，图12、图11中的自变量都是可变电阻接入电路的百分比。

图12、图11显示了四阶蔡氏电路的初值敏感性，对于不同的初值，电路产生混沌行为的参数区间有所区别，对于某一参数取值而言，不同初值产生的混沌行为也是不同的。一个有趣的规律是，似乎电路更倾向于保持初值所取的状态。

图11所取的初值是 x_{0A} ，分岔图所取的 Poincaré 为 $y = 0$ 平面，所画的是 Poincaré 映射后的 x 的分岔。我们以此为例来考察电路的混沌行为和 Lyapunov 指数谱和分岔图之间的关系。其中，Lyapunov 指数谱可以看出混沌行为的大致参数范围，我们仅用于估算，其计算时步和参数扫描步长都取得比较粗，更精细的划分还是以分岔图为准，这也是二者所划分的相图产生差别的原因。

如图11， R 比较小时，电路处于极限环区，没有混沌行为，其只有一个 Lyapunov 指数为正，且该区间在分岔图中不发生分岔。

随着电阻增大，系统进入双涡旋区，也即出现

双吸引子，此时有三个正的 Lyapunov 指数，显然发生了超混沌，同时分岔图中出现了两条主分岔还有一些细小的分岔说明了此时的超混沌性。

继续增大 R ，会出现一个较小的 R 窗口，Lyapunov 指数谱在此出现一个深谷，只剩下一个 Lyapunov 指数为正，系统失去混沌性，开始周期行为。在分岔图中，我们可以看到整个区间内细小的分岔消失了，只剩下几条主分岔，这也就意味着，此时的周期性行为不是单周期的，而是倍周期的，正如我们在相轨图中看到的闭合扭结一样。在分岔图中还能分辨出准周期区，此时的细小分岔重现出现，但是主要集中在主分岔周围，系统虽然有混沌性，但是还是能看出倍周期的轨道。

继续增大 R ，又出现三个正的 Lyapunov 指数，对应的就是单涡旋区，分岔图中，只剩一条主分岔，它是由许多细小的分岔构成的，具有分形的性质，此时仍是超混沌状态，而不是倍周期。

比较有趣的是单周期区，此时只有一个正的 Lyapunov 指数，分岔图中只剩一簇分岔，而且这簇分岔在单周期区内不再分岔，不具有分形的性质，此时系统并不是混沌的，而是渐进周期的。单周期区中存在一点，所有的分岔在此汇聚，此时的相轨图恰好是一个完美闭合的单周期。

在最后的衰减区，四个 Lyapunov 指数都小于 0，相空间的体积元是不断缩减的。从 Lyapunov 指数谱的突变来看，这里可以分为两个小区间，对应分岔图中的衰减区和截止区。分岔图衰减区，细小的分岔不再分岔，而且会逐个截断，这表现为相轨图中的渐进衰减，而到了截止区，所有的分岔都截断了，此时的系统不再发生振荡。

对于不同的初值得到的 Lyapunov 指数谱和分岔图，我们都可以按照类似的分析得到相图，这是一个普适的唯象方法。

参考文献

- [1] MATSUMOTO T. A chaotic attractor from chua's circuit[J]. Circuits and Systems IEEE Transactions on, 1984, 31(12): 1055-1058.
- [2] 邵书义, 闵富红, 王恩荣. 四阶蔡氏电路的数值仿真分析与电路实现 [J]. 南京师范大学学报: 工程技术版, 2012, 12(3): 4.
- [3] 严琴琴, 马丽萍, 金李伟, 等. 四阶蔡氏电路稳定性分析 [J]. 绍兴文理学院学报, 2010, 30(10): 7.
- [4] 王娟, 摆玉龙, 陈春梅, 等. 基于电流传输器的四阶蔡氏混沌电路设计及仿真 [J]. 量子电子学报, 2018.
- [5] 李振国, 高敏. 浅析四阶变型蔡氏电路混沌同步保密通信系统 [J]. 科技风, 2015(3): 1.
- [6] 四阶蔡氏超混沌电路的单向耦合同步研究 [J]. 系统工程与电子技术, 2003, 25(9): 3.
- [7] 郭卫平, 刘殿通. 蔡氏电路混沌系统的自适应反馈控制 [J]. 电机与控制学报, 2004, 8(4): 5.
- [8] 李振国, 高敏. 基于 Multisim 四阶蔡氏电路混沌保密通信系统仿真分析 [J]. 新技术新工艺, 2015(07): 52-55.
- [9] 包伯成. 混沌电路导论 [M]. [出版地不详]: 混沌电路导论, 2013.
- [10] 沈韩, 等. 中山大学物理学院基础物理实验讲义: 实验 C9 基于 Multisim 的混沌电路实验 [J]. 2022.
- [11] WOLF A, SWIFT J B, SWINNEY H L, et al. Determining lyapunov exponents from a time series[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1985, 16(3): 285-317.

Phenomenological Study on Hyperchaotic Dynamics of Fourth-order Chua's Circuit

Yinkai Yu and Yuchen Wang

School of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

Abstract: Compared with the results of the third-order Chua's circuit, we establish a dimensionless theoretical model which can describe the chaotic dynamics and non-chaotic dynamics of the fourth-order Chua's circuit at the same time, and observe various dynamic phases of the fourth-order Chua's circuit by means of numerical, simulation and experiment. Finally, we analyze the Lyapunov exponential spectrum of the fourth-order Chua's circuit and the bifurcation diagram of the Poincaré map, and obtain the dynamic phase diagram of the fourth-order Chua's circuit.

Key words: fourth-order Chua's circuit, chaotic dynamics, Lyapunov exponent spectrum, bifurcation diagram, phase track diagram.

A 实验信息记录

A.1 基本信息

实验室房间号：411	实验人姓名（学号）：余荫铠（20343078）
实验桌桌号：411A03	合作者姓名（学号）：王誉晨（20343059）

A.2 实验环境

第一次实验（2022 年 5 月 11 日星期三下午）	室温：26°C	湿度：78%
第一次实验（2022 年 5 月 18 日星期三下午）	室温：24°C	湿度：60%
第一次实验（2022 年 6 月 22 日星期三下午）	室温：27°C	湿度：61%

B 数值计算代码

B.1 Wolf 算法求解 Lyapunov 指数

```
1 function [Texp, Lexp] = lyapunov(n, rhs_ext_fun, fcn_integrator, tstart, stept, tend,
   ↪ ystart, ioutp)
2
3     n1 = n;
4     n2 = n1 * (n1+1);
5     nit = round((tend-tstart)/stept);
6
7     y=zeros(n2,1);
8     cum=zeros(n1,1);
9     y0=y;
10    gsc=cum;
11    znorm=cum;
12
13    y(1:n)=ystart(:);
14    for i=1:n1
15        y((n1+1)*i)=1.0;
16    end
17    t=tstart;
18
19
20    for ITERLYAP=1:nit
21
22        [T,Y] = feval(fcn_integrator, rhs_ext_fun, [t t+stept], y);
23        t = t + stept;
24        y = Y(size(Y,1),:);
25        for i=1:n1
26            for j=1:n1
27                y0(n1*i+j)=y(n1*j+i);
28            end
```

```

29     end
30
31     znorm(1)=0.0;
32     for j=1:n1
33         znorm(1)=znorm(1)+y0(n1*j+1)^2;
34     end
35     znorm(1)=sqrt(znorm(1));
36     for j=1:n1
37         y0(n1*j+1)=y0(n1*j+1)/znorm(1);
38     end
39     for j=2:n1
40         for k=1:(j-1)
41             gsc(k)=0.0;
42             for l=1:n1
43                 gsc(k)=gsc(k)+y0(n1*l+j)*y0(n1*l+k);
44             end
45         end
46         for k=1:n1
47             for l=1:(j-1)
48                 y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)-gsc(1)*y0(n1*k+1);
49             end
50         end
51         znorm(j)=0.0;
52         for k=1:n1
53             znorm(j)=znorm(j)+y0(n1*k+j)^2;
54         end
55         znorm(j)=sqrt(znorm(j));
56         for k=1:n1
57             y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)/znorm(j);
58         end
59     end
60
61     for k=1:n1
62         cum(k)=cum(k)+log(znorm(k));
63     end
64
65     %%
66 %     lp=zeros(n1,1); % 预分配
67     for k=1:n1
68         lp(k)=cum(k)/(t-tstart);
69     end
70
71     if ITERLYAP==1
72         Lexp=lp;
73         Texp=t;

```

```

74     else
75         Lexp=[Lexp; lp];
76         Texp=[Texp; t];
77     end
78
79     if (mod(ITERLYAP,ioutp)==0)
80         fprintf('t=%6.4f',t);
81         for k=1:n1
82             fprintf(' %10.6f',lp(k));
83         end
84         fprintf('\n');
85     end
86
87     %         if t==tend
88     %             for k=1:n1
89     %                 Z(k)=lp(k);
90     %             end
91     %         end
92
93     for i=1:n1
94         for j=1:n1
95             y(n1*j+i)=y0(n1*i+j);
96         end
97     end
98     %%
99
100 end
101
102 end

```

B.2 非线性电阻伏安特性

```

1 function hx = h(x, R)
2
3     % 混沌部分
4     %     ma = -0.75719e-3 * R;
5     %     mb = -0.40875e-3 * R;
6     %     hx = mb*x + 0.5*(ma-mb)*(abs(x+1)-abs(x-1));
7
8     % 完整
9     ma1 = -0.30298;
10    mb1 = 0.04545;
11    uc1 = 0.96;
12

```

```

13     ma2 = -0.45420;
14     mb2 = 4.54249;
15     uc2 = 6.505;
16
17     u = x * uc1;
18     hx1 = mb1*u + 0.5*(ma1-mb1)*(abs(u+uc1)-abs(u-uc1));
19     hx2 = mb2*u + 0.5*(ma2-mb2)*(abs(u+uc2)-abs(u-uc2));
20
21     hx = hx1 + hx2;
22     hx = hx * R/uc1 * 1e-3;
23
24 end

```

B.3 线性方程中的非线性项

```

1 function mx = m(x, R)
2
3     % 混沌部分
4     %     ma = -0.75719e-3 * R;
5     %     mb = -0.40875e-3 * R;
6     %     hx = mb*x + 0.5*(ma-mb)*(abs(x+1)-abs(x-1));
7
8     % 完整
9     ma1 = -0.30298;
10    mb1 = 0.04545;
11    uc1 = 0.96;
12
13    ma2 = -0.45420;
14    mb2 = 4.54249;
15    uc2 = 6.505;
16
17    u = x * uc1;
18
19    if abs(x) < uc1
20        mx1 = ma1;
21    else
22        mx1 = mb1;
23    end
24
25    if abs(x) < uc2
26        mx2 = ma2;
27    else
28        mx2 = mb2;
29    end

```

```

30
31     mx  = mx1 + mx2;
32     mx  = mx * R/uc1 * 1e-3;
33
34 end

```

B.4 三阶蔡氏电路无量纲化方程

```

1 function dy = chua3(t, y)
2     global ratio
3
4     R = 2e3 * 0.01 * ratio; % 可变电阻的百分比
5     dy = zeros(3,1); % (x,y,z)
6     a = 10; %
7     b = R^2 * 100e-9 / 20e-3; %
8     hx = h(y(1), R); % h(x)
9     c = hx / y(1); % 就是 ljp 定义的那个 c
10    % g1 = R/60;
11    % g2 = 0.05;
12    J = [ -a*(1+c),    a,    0;
13           1,    -1,    1;
14           0,    -b,    0]; % 注意, J 不是 Jacobi 矩阵, ljp 写的不对。
15    dy = J * y;
16 end

```

B.5 三阶蔡氏电路相轨图

```

1 format long
2 tspan = 0:1e-3:100;
3 % tspan = 0:1e-1:10000;
4 % y0 = [7.045, 6.35, 11.3, -0.4114]'; % 小
5 % y0 = [-6.8, 0, 6.6, -0.18]'; % 大
6 y0 = [1, 0, 0]'; % 随便
7 % y0 = [-1.304260264359203  -0.000203087732367   0.043343573728164  -0.035852955611932]; % 吸引子
8 global ratio
9
10 %% 初态 [1, 0, 0, 0]
11 % ratio = 83.7; % 双吸引子
12 % ratio = 89.3; % 准多周期
13 % ratio = 94; % 单吸引子
14 % ratio = 96; % 准单周期
15 % ratio = 99; % 衰减
16 % ratio = 50; % 极限环
17 % ratio = 0; % 直线

```

```

18 % ratio = 50; % 极限环
19
20 %% 初态 [-1.304260264359203 -0.000203087732367 0.043343573728164 -0.035852955611932]
21
22 % ratio = 91.9; % 倍周期
23 % ratio = 74; % 极限环
24 % ratio = 0; % 直线
25 % ratio = 75; % 双吸引子
26 % ratio = 93.5; % 准倍周期
27 % ratio = 94.6; % 准倍周期
28 % ratio = 94; % 单吸引子
29 % ratio = 98.29; % 单周期
30
31 ratio = 84;
32 % xy
33 % ratio = 102+-0.2;
34 [t, y] = ode45('chua3', tspan, y0);
35 plot(y(10000:end,1), y(10000:end,2), 'LineWidth', 2)
36 xlabel('u_1 (V)')
37 ylabel('u_2 (V)')
38
39 % xyz
40 plot3(y(:,1), y(:,2), y(:,3))
41 xlabel('x')
42 ylabel('y')
43 zlabel('z')
44
45 % % xyw
46 % plot3(y(:,1), y(:,2), y(:,4))
47 % xlabel('x')
48 % ylabel('y')
49 % zlabel('w')
50
51 % % yzw
52 % plot3(y(:,2), y(:,3), y(:,4))
53 % xlabel('y')
54 % ylabel('z')
55 % zlabel('w')
56
57 % % zw
58 % plot(y(:,3), y(:,4))
59 % xlabel('z')
60 % ylabel('w')
61
62 % yz

```

```

63 plot(y(:,2), y(:,3))
64 xlabel('y')
65 ylabel('z')
66
67 % xz
68 plot(y(:,1), y(:,3))
69 xlabel('x')
70 ylabel('z')
71
72 % % xt yt zt wt
73 % plot(t,y)
74 % legend(['x'; 'y'; 'z'; 'w'])

```

B.6 四阶蔡氏电路无量纲化方程

```

1 function dy = chua4(t, y)
2     global ratio
3
4     R = 2e3 * 0.01 * ratio; % 可变电阻的百分比
5     dy = zeros(4,1); % (x,y,z,w)
6     a = 10; %
7     b = R^2 * 100e-9 / 20e-3; %
8     hx = h(y(1), R); % h(x)
9     c = hx / y(1); % 就是 ljp 定义的那个 c
10    g1 = R/60;
11    g2 = 0.05;
12    J = [ -a*(1+c),    a,    0,    0;
13           1,    -1,    1,    0;
14           0,    -b,    0,    b;
15           0,    0, -g2, -g1*g2 ]; % 注意, J 不是 Jacobi 矩阵, ljp 写的不对。
16    dy = J * y;
17 end

```

B.7 四阶蔡氏电路相轨图

```

1 format long
2 tspan = 0:1e-3:100;
3 % tspan = 0:1e-1:10000;
4 % y0 = [7.045, 6.35, 11.3, -0.4114]'; % 小
5 % y0 = [-6.8, 0, 6.6, -0.18]'; % 大
6 y0 = [1, 0, 0, 0]'; % 随便
7 y0 = [-1.304260264359203 -0.000203087732367 0.043343573728164 -0.035852955611932];
8 % y0 = [0.01, 0, 0, 0]'; % 0

```

```

9 global ratio
10
11 %% 初态 [1, 0, 0, 0]
12 % ratio = 83.7; % 双吸引子
13 % ratio = 89.3; % 准多周期
14 % ratio = 94; % 单吸引子
15 % ratio = 96; % 准单周期
16 % ratio = 99; % 衰减
17 % ratio = 50; % 极限环
18 % ratio = 0; % 直线
19 % ratio = 50; % 极限环
20
21 %% 初态 [-1.304260264359203 -0.000203087732367 0.043343573728164 -0.035852955611932]
22
23 % ratio = 91.9; % 倍周期
24 % ratio = 50; % 极限环
25 % ratio = 0; % 直线
26 % ratio = 75; % 双吸引子
27 % ratio = 93.5; % 准倍周期
28 % ratio = 94.6; % 准倍周期
29 % ratio = 94; % 单吸引子
30 ratio = 98.29; % 单周期
31
32 % ratio = 95.415;
33 % xy
34 % ratio = 98.5+0;
35 [t, y] = ode45('chua4', tspan, y0);
36 plot(y(20000:end,1), y(20000:end,2), "LineWidth", 2)
37 xlabel('x')
38 ylabel('y')
39
40 % xyz
41 plot3(y(20000:end,1), y(20000:end,2), y(20000:end,3), "LineWidth", 2)
42 xlabel('x')
43 ylabel('y')
44 zlabel('z')
45
46 % xyw
47 plot3(y(20000:end,1), y(20000:end,2), y(20000:end,4), "LineWidth", 2)
48 xlabel('x')
49 ylabel('y')
50 zlabel('w')
51
52 % yzw
53 plot3(y(20000:end,2), y(20000:end,3), y(20000:end,4), "LineWidth", 2)

```

```

54 xlabel('y')
55 ylabel('z')
56 zlabel('w')
57
58 % zw
59 plot(y(20000:end,3), y(20000:end,4),"LineWidth",2)
60 xlabel('z')
61 ylabel('w')
62
63 % yw
64 plot(y(20000:end,2), y(20000:end,4),"LineWidth",2)
65 xlabel('y')
66 ylabel('w')
67
68 % xz
69 plot(y(20000:end,1), y(20000:end,3),"LineWidth",2)
70 xlabel('x')
71 ylabel('z')
72
73 % xt yt zt wt
74 plot(t,y,"LineWidth",2)
75 legend(['x'; 'y'; 'z'; 'w'])

```

B.8 四阶蔡氏电路 Poincaré 映射

```

1 clear
2 format long
3 tspan = 0:1e-1:10000;
4 % y0 = [7.045, 6.35, 11.3, -0.4114]'; % 小
5 % y0 = [-6.8, 0, 6.6, -0.18]'; % 大
6 % y0 = [1, 0, 0, 0]'; % 随便
7 y0 = [-1.304260264359203 -0.000203087732367 0.043343573728164 -0.035852955611932];
8 % 吸引子
8 global ratio
9 % ratio = 0; % 直线
10 % ratio = 50; % 极限环
11 % ratio = 75; % 双吸引子
12 % ratio = 91.9; % 倍周期
13 % ratio = 93.5; % 准倍周期
14 % ratio = 94; % 单吸引子
15 % ratio = 94.6; % 准倍周期
16 ratio = 98.29; % 单周期
17 sol = ode45(@chua4, [tspan(1) tspan(end)], y0);
18

```

```

19 ss = deval(sol, tspan)';
20 s = ss(20000:end,:);
21
22 aa = 0;
23 bb = 0;
24 cc = 1;
25 dd = 0;
26 p = -4;
27 func = (aa*s(:,1) + bb*s(:,2) + cc*s(:,3) + dd*s(:,4) + p) > 0;
28 func_n = (func(1:end-1)>0) & (xor(func(1:end-1),func(2:end)));
29 m = find(func_n==1);
30
31 t_intsec = -(aa*s(m,1) + bb*s(m,2) + cc*s(m,3) + dd*s(m,4) + p) ./ (aa*s(m+1,1) - s(m,1)
    ↪ ) + bb*(s(m+1,2)-s(m,2)) + cc*(s(m+1,3)-s(m,3)) + dd*(s(m+1,4)-s(m,4)));
32 x_map = s(m,1) + (s(m+1,1)-s(m,1)) .* t_intsec;
33 y_map = s(m,2) + (s(m+1,2)-s(m,2)) .* t_intsec;
34 z_map = s(m,3) + (s(m+1,3)-s(m,3)) .* t_intsec;
35 w_map = s(m,4) + (s(m+1,4)-s(m,4)) .* t_intsec;
36
37 % figure
38 % scatter3(x_map, y_map, z_map, ".")
39 % xlabel('x')
40 % ylabel('y')
41 % zlabel('z')
42
43 % figure
44 % scatter3(x_map, y_map, w_map, ".")
45 % xlabel('x')
46 % ylabel('y')
47 % zlabel('w')
48
49 figure
50 scatter3(x_map, y_map, w_map, ".")
51 xlabel('x')
52 ylabel('y')
53 zlabel('w')
54
55 figure
56 H = plot(x_map, z_map);
57 set(H, 'linestyle', 'none', 'marker', '.', 'markersize', 5)
58 xlabel('x')
59 ylabel('z')
60 % hold on
61 % drawnow
62

```

```

63 % figure
64 % H = plot(y_map, z_map);
65 % set(H, 'linestyle', 'none', 'marker', '.', 'markersize', 5)
66 % xlabel('y')
67 % ylabel('z')
68
69 figure
70 H = plot(x_map, y_map);
71 set(H, 'linestyle', 'none', 'marker', '.', 'markersize', 5)
72 xlabel('x')
73 ylabel('y')

```

B.9 四阶蔡氏电路分岔图

```

1 clear
2 format long
3 tspan = 0:1e-3:100;
4 % y0 = [7.045, 6.35, 11.3, -0.4114]'; % 小
5 % y0 = [-6.8, 0, 6.6, -0.18]'; % 大
6 % y0 = [1, 0, 0, 0]'; % 随便
7 y0 = [-1.304260264359203 -0.000203087732367 0.043343573728164 -0.035852955611932];
   ⇨ % 吸引子
8
9 global ratio
10
11 for ratio = 50:0.01:120
12     %ratio
13     sol = ode45(@chua4, [tspan(1) tspan(end)], y0);
14     ss = deval(sol, tspan);
15     s = ss(10000:end,:);
16
17     aa = 0;
18     bb = 1;
19     cc = 0;
20     dd = 0;
21     p = 0; % 平面方程 y=0
22
23     func = (aa*s(:,1) + bb*s(:,2) + cc*s(:,3) + dd*s(:,4) + p) > 0;
24     func_n = (func(1:end-1)>0) & (xor(func(1:end-1),func(2:end)));
25     m = find(func_n==1);
26
27     t_intsec = -(aa*s(m,1) + bb*s(m,2) + cc*s(m,3) + dd*s(m,4) + p) ./ (aa*s(m+1,1) - s
   ⇨ (m,1) + bb*(s(m+1,2)-s(m,2)) + cc*(s(m+1,3)-s(m,3)) + dd*(s(m+1,4)-s(m,4)));
28     x_map = s(m,1) + (s(m+1,1)-s(m,1)) .* t_intsec;

```

```

29     y_map = s(m,2) + (s(m+1,2)-s(m,2)) .* t_intsec;
30     z_map = s(m,3) + (s(m+1,3)-s(m,3)) .* t_intsec;
31     w_map = s(m,4) + (s(m+1,4)-s(m,4)) .* t_intsec;
32
33     H = plot(ratio*ones(size(s(m,1))), x_map);
34     set(H, 'linestyle', 'none', 'marker', '.', 'markersize', 1, "Color", 'red')
35     hold on
36     drawnow
37 end
38
39 xlabel('R (%)')
40 ylabel('x')
41 ylim([-7,7])

```

B.10 四阶蔡氏电路 Lyapunov 指数

```

1 function dX = chua4_LE(t, X)
2
3     global ratio
4
5     R = 2e3 * 0.01 * ratio; % 可变电阻的百分比
6     a = 10; %
7     b = R^2 * 100e-9 / 20e-3; %
8     g1 = R/60;
9     g2 = 0.05;
10
11     x=X(1);
12     y=X(2);
13     z=X(3);
14     w=X(4);
15     Y= [X(5) X(9) X(13) X(17);
16         X(6) X(10) X(14) X(18);
17         X(7) X(11) X(15) X(19);
18         X(8) X(12) X(16) X(20)];
19     dX=zeros(16,1);
20
21     hx = h(x, R); % h(x)
22     c = hx / x; % 就是 ljp 定义的那个 c
23     J_ljp = [ -a*(1+c),    a,    0,    0;
24               1,    -1,    1,    0;
25               0,    -b,    0,    b;
26               0,    0, -g2, -g1*g2 ]; % 注意, J 不是 Jacobi 矩阵, ljp 写的不对。
27     dX(1:4) = J_ljp * X(1:4);
28

```

```

29     Jaco = [ -a*(1+m(x,R)),    a,    0,    0;
30              1,    -1,    1,    0;
31              0,    -b,    0,    b;
32              0,    0, -g2, -g1*g2 ]; % 这是真的 Jacobi
33     dX(5:20) = Jaco*Y;
34 end

```

B.11 四阶蔡氏电路 Lyapunov 指数谱

```

1 clear
2 format long
3 % tspan = 0:1e-3:100;
4 % y0 = [7.045, 6.35, 11.3, -0.4114]'; % 小
5 % y0 = [-6.8, 0, 6.6, -0.18]'; % 大
6 y0 = [1, 0, 0, 0]'; % 随便
7 % y0 = [-1.304260264359203 -0.000203087732367 0.043343573728164 -0.035852955611932]; % 吸引子
8
9 global ratio
10 figure
11
12 ratio_range = 50:0.5:120;
13 for i=1:length(ratio_range)
14     ratio = ratio_range(i);
15     % [T, Res] = lyapunov(4, @chua4_LE, @ode45, 0, 0.5, 600, y0, 0);
16     [T, Res] = lyapunov(4, @chua4_LE, @ode45, 0, 5, 100, y0, 0);
17     Lyapunov1(i) = Res(end,1);
18     Lyapunov2(i) = Res(end,2);
19     Lyapunov3(i) = Res(end,3);
20     Lyapunov4(i) = Res(end,4);
21 %     ratio
22 %     H = plot(ratio, Res(end,:)); hold on
23 %     set(H, 'linestyle', 'none', 'marker', '.', 'markersize', 10, "Color", 'yellow')
24 %     drawnow
25 end
26
27 plot(ratio_range, Lyapunov1(:), "LineWidth", 2); hold on
28 plot(ratio_range, Lyapunov2(:), "LineWidth", 2); hold on
29 plot(ratio_range, Lyapunov3(:), "LineWidth", 2); hold on
30 plot(ratio_range, Lyapunov4(:), "LineWidth", 2); hold on
31
32 legend(['x 方向'; 'y 方向'; 'z 方向'; 'w 方向'])
33 xlabel('R (%)')
34 ylabel('Lyapunov Exponent')
35 ylim([-0.8, 1.0])

```

C 思考题

题1. 检索资料，简述混沌电路的可能应用。要求给出参考文献。

可以进行自适应系统控制、进行保密通信。引言1部分简单介绍了一下，参考文献也列在那里了。

题2. 检索资料，检索至少一种非本实验讲义提供的混沌电路，并进行仿真，给出仿真电路和仿真结果。

我这整篇文章都在讲这个，这里就不再赘述了。

D 原始数据与教师签名

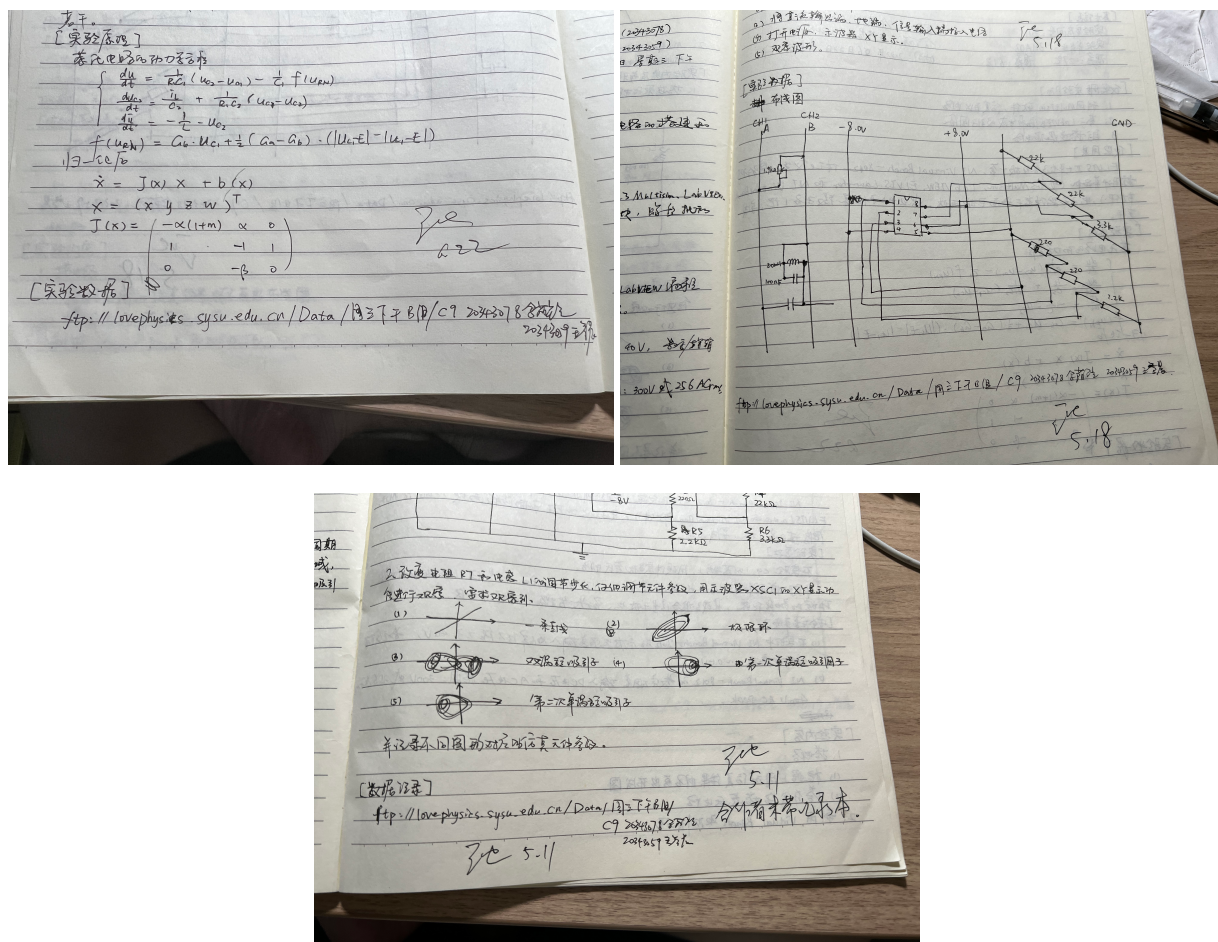


图 13 原始数据与教师签名