诺特定理的新推导方法

余荫铠 *

中山大学 物理学院，广州 510275

摘　要：本文使用变分法推导诺特定理，并以整体 U(1) 对称性为例进行了说明。先不考虑对称变换的整体性，即允许局域化的变换，写出变换后的作用量作为变换场自由度 $\theta(x)$ 的函数 $\tilde{S}\left(\phi,\partial_\mu\phi,\phi^\dagger,\partial_\mu\phi^\dagger,\theta,\partial_\mu\theta\right)$。使用最小作用量原理，可以得到依赖于整体对称性条件 $\partial_\mu\theta(x)\equiv 0$ 的守恒流方程。

关键词：诺特定理，复标量场，整体 U(1) 对称性，变分原理

我打算写这样一个系列，由两篇文章组成。这是第一篇文章，讨论诺特定理新推导方法。第二篇文章在这篇文章的基础上讨论规范化（gauged）U(1) 流的守恒条件问题。

1　引言

在我看过的场论（经典场论或量子场论）教材中，诺特定理的推导方法大致有两种。一种方法 [1-2] 是考虑连续对称变化导致的场发生无穷小变化，而对称性要求拉格朗日密度不改变，即

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}\delta\varphi_a+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a}\delta\partial_\mu\varphi_a=0, \tag{1}$$

再把拉格朗日方程

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}=\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a}, \tag{2}$$

代入(1)的第一项，就可以将(1)的两项合并为

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a}\delta\varphi_a\right)=0, \tag{3}$$

*邮箱：yuyk6@mail2.sysu.edu.cn，主页：www.yykspace.com

从而可以定义出守恒流

$$j^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a}\delta\varphi_a,\quad \partial_\mu j^\mu=0. \tag{4}$$

第二种方法 [3] 则是把连续对称变换局域化，即考虑的是 $\delta\varphi_a=\theta(x)K$，$K$ 为原变换的生成元。局域化后的变换就不再是对称变换了，作用量会改变

$$\delta S=\int \mathrm{d}^4x j^\mu\partial_\mu\theta(x), \tag{5}$$

然后再强行让局域化变换后的理论仍然是物理的，即假设无穷小变换是作用在满足运动微分方程的真实场位形上，于是可以使用最小作用量原理 $\delta S=0$，从而分部积分得到

$$-\int \mathrm{d}^4x\partial_\mu j^\mu\theta(x)=0, \tag{6}$$

根据 $\theta(x)$ 的任意性即得流守恒方程

$$\partial_\mu j^\mu=0. \tag{7}$$

这两种方法各有弊端。前者总是有一点数学上的不严谨，如此定义的守恒流里包含了无穷小量，在实际的定义中总要另加修饰，而且这样的方法很难看出规范对称性为何不是真实的对称性，不对应守恒流。而后者在物理思路上是很奇怪的，明明是要推真实的对称性的守恒流，却要考虑把变换给局域化才能算出来。

下面我提出的方法思想上来源于后者，但是又结合了前者的技巧把这思路给理顺了。可以看作是两种方法的缝合，但没有在任何教材和文献上看到过。

2 整体 U(1) 对称性

诺特定理指出，一个连续对称性，一定对应着一个守恒流。

不失一般性地，我们以整体 U(1) 对称性为例推导诺特定理。再不失一般性地，考虑这样一个模型，它具有整体 U(1) 对称性。我们的模型是自由复标量场

$$\mathcal{L}=\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi-m^2\phi^\dagger\phi, \tag{8}$$

$$S=\int \mathrm{d}^4x\mathcal{L}. \tag{9}$$

考虑 U(1) 变换为

$$\phi(x)\to\tilde{\phi}(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta(x)}\phi(x), \tag{10}$$

$$\phi^\dagger(x)\to\tilde{\phi}^\dagger(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta(x)}\phi^\dagger(x), \tag{11}$$

其中 q 为场的 U(1) 荷，$\theta(x)$ 是可以连续取值的实数，故 U(1) 变换为连续变换。当 $\partial_\mu\theta(x)\equiv 0$

时，即 θ 值不随时空变化，那么这个变换是全局的，我们称之为整体 U(1) 变换。不难发现，在整体 U(1) 变换下，拉格朗日密度和作用量是不变的

$$\mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}} = \partial_\mu \tilde{\phi}^\dagger \partial^\mu \tilde{\phi} - m^2 \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} = \partial_\mu \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi\right)^\dagger \partial^\mu \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi\right) - m^2 \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi\right)^\dagger \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi\right) = \mathcal{L}, \tag{12}$$

$$S \to \tilde{S} = \int \mathrm{d}^4x \tilde{\mathcal{L}} = \int \mathrm{d}^4x \mathcal{L} = S, \tag{13}$$

可见复标量场具有整体 U(1) 对称性。变换后的拉格朗日密度 $\tilde{\mathcal{L}}\left(\phi, \partial_\mu\phi, \phi^\dagger, \partial_\mu\phi^\dagger, \theta, \partial_\mu\theta\right)$ 和作用量 $\tilde{S}\left(\phi, \partial_\mu\phi, \phi^\dagger, \partial_\mu\phi^\dagger, \theta, \partial_\mu\theta\right)$ 也是描述自由复标量场的。

3 从变分法导出整体 U(1) 流和诺特定理

我们直接对上面这种形式的作用量变分

$$\delta\tilde{S} = \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\phi^\dagger}\delta\phi^\dagger + \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\partial_\mu\phi^\dagger}\delta\partial_\mu\phi^\dagger + \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta\partial_\mu\phi + \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\theta}\delta\theta + \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\partial_\mu\theta}\delta\partial_\mu\theta\right], \tag{14}$$

前四项我们可以很容易写成熟悉的分部积分，并丢掉边界项，因为边界即无穷远处变分为零，

$$\delta\tilde{S} = \int \mathrm{d}^4x \left[\left(\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\phi^\dagger} - \partial_\mu\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\partial_\mu\phi^\dagger}\right)\delta\phi^\dagger + \left(\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\partial_\mu\phi}\right)\delta\phi + \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\theta}\delta\theta + \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\partial_\mu\theta}\delta\partial_\mu\theta\right], \tag{15}$$

注意这里的 $\tilde{\mathcal{L}}$ 虽然和 $\mathcal{L}$ 在 $\partial_\mu\theta(x) \equiv 0$ 条件下是相等的，但是 $\tilde{\mathcal{L}}$ 本身具有与 $\mathcal{L}$ 不同的函数形式。而且这里 $\partial_\mu\theta(x) \equiv 0$ 并不被看作变分约束，而只是类似于 on-shell 条件。在 off-shell 变分时，我们允许 $\partial_\mu\theta(x) \neq 0$，变分后的作用量 $\tilde{S}$ 不一定是物理的，不一定是描述自由复标量场的作用量。我们可以显示地写出 $\tilde{\mathcal{L}}$ 的函数形式

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} &= \partial_\mu \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi\right)^\dagger \partial^\mu \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi\right) - m^2 \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi\right)^\dagger \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\theta}\phi\right) \\ &= \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi + \mathrm{i}q\left[\phi^\dagger\left(\partial^\mu\phi\right) - \left(\partial^\mu\phi^\dagger\right)\phi\right]\partial_\mu\theta + q^2\phi^\dagger\phi\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta,\end{aligned} \tag{16}$$

由此可以计算

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\partial_\mu\theta} = \mathrm{i}q\left[\phi^\dagger\left(\partial^\mu\phi\right) - \left(\partial^\mu\phi^\dagger\right)\phi\right] + 2q^2\phi^\dagger\phi\partial^\mu\theta, \tag{17}$$

这里记

$$j^\mu = \mathrm{i}q\left[\phi^\dagger\left(\partial^\mu\phi\right) - \left(\partial^\mu\phi^\dagger\right)\phi\right], \tag{18}$$

后面我们将说明，此即整体 U(1) 守恒流。我们把 $\tilde{\mathcal{L}}$ 的具体形式带回变分(15)中得

$$\delta\tilde{S}=\int \mathrm{d}^4x\left[-\left(m^2\phi+\partial_\mu\partial^\mu\phi\right)\delta\phi^\dagger-\left(m^2\phi^\dagger+\partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger\right)\delta\phi+\left(j^\mu+2q^2\phi^\dagger\phi\partial^\mu\theta\right)\delta\partial_\mu\theta\right], \quad (19)$$

最后一项做分部积分，并丢掉边界项，

$$\delta\tilde{S}=\int \mathrm{d}^4x\left[-\left(m^2\phi+\partial_\mu\partial^\mu\phi\right)\delta\phi^\dagger-\left(m^2\phi^\dagger+\partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger\right)\delta\phi-\left(\partial_\mu j^\mu+2q^2\partial_\mu(\phi^\dagger\phi\partial^\mu\theta)\right)\delta\theta\right]. \quad (20)$$

最后，我们需要注意实际上 $\delta\phi^\dagger,\delta\phi,\delta\theta$ 并不是独立的，我们不能直接由变分的任意性得到变分项的系数分别为零。而是当满足运动方程

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu+m^2\right)\phi=0, \quad \left(\partial_\mu\partial^\mu+m^2\right)\phi^\dagger=0, \quad (21)$$

时，有

$$\delta\tilde{S}=\int \mathrm{d}^4x\left[-\left(\partial_\mu j^\mu+2q^2\partial_\mu(\phi^\dagger\phi\partial^\mu\theta)\right)\delta\theta\right], \quad (22)$$

此时再由变分 $\delta\theta$ 的任意性得到

$$\partial_\mu j^\mu+2q^2\partial_\mu(\phi^\dagger\phi\partial^\mu\theta)=0. \quad (23)$$

对于整体 U(1) 对称性 $\partial_\mu\theta(x)\equiv 0$，可以得到流守恒方程

$$\partial_\mu j^\mu=0. \quad (24)$$

这样我们就推出了整体 U(1) 对称性情况的诺特定理，注意最终结论(24)的成立是依赖于场的运动方程和 $\partial_\mu\theta(x)\equiv 0$ 条件的。在(22)中，我们可以直观地看出对称性与流守恒的关系。这正是这个方法的独特之处：$\partial_\mu\theta(x)\equiv 0$ 条件是最后才加上去的。这样可以方便看出真实对称性和冗余的规范对称性的区别，后者不给出新的守恒流。

4 讨论

以上的推导是以 U(1) 整体对称性为例的，也可以很容易地推广到其他的对称性中。这里之所以以 U(1) 为例，是因为本系列的第二篇文章就是要讨论 U(1) 规范化（gauging）后的守恒流问题。我上面提出的这种推导方法，很容易看出引入规范场的物理意义。欲知后事如何，且听下回分解。

参考文献

[1] 余钊焕. 量子场论讲义[Z]. 2023.
[2] ZEE A, SEGRè G. Quantum field theory in a nutshell (second edition)[J]. American Journal of Physics, 2010, 78(9): p.974-976.
[3] 陈童. 经典场论新讲[Z]. 2022.