关于无序系统的一点认识

余荫铠

2022 年 4 月 28 日

1 自旋玻璃

自旋玻璃是一种典型的无序系统。

它的无序来源于阻挫效应。下面是一个阻挫效应的示例 (图1)。对于三角晶格的二

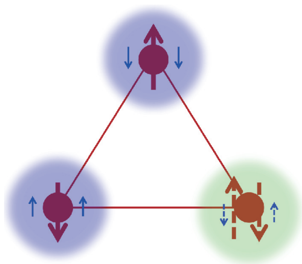

图 1: 阻挫效应

维自旋模型，考虑晶格内部为反铁磁相互作用，则无法得到稳定构型——当其中两个自旋的方向相反时，第三个自旋的方向无论取上或者下，使得体系的能量最低。这就是阻挫效应。这种情况下，系统没有长程序，称为自旋玻璃相。如果本就从一个无序相出发，quench 到自旋玻璃相，难以使用朗道的实空间构型的对称性破缺理论描述这个相变。

2 复本方法

考虑 SK（D.Sherrington，S.Kerkpartrick）模型，即自旋之间的相互作用为全连接形式

$$H = -\sum_{i,j} J_{i,j} S_i S_j \tag{1}$$

其中的自旋间耦合系数 $J_{i,j}$ 服从二维高斯分布。其配分函数为

$$Z = \sum_{\{S_i\}} \mathrm{e}^{-\beta H} \tag{2}$$

由于无序相互作用的存在，自旋玻璃的自由能需要对满足给定随机分布的所有 $J_{i,j}$ 作平均，即

$$F = -\frac{1}{\beta}\int P(J_{i,j})\mathrm{d}J_{i,j}\ln Z \tag{3}$$

这个式子一般无法直接积出，于是考虑复本方法

$$\ln Z = \lim_{n\to 0}\frac{Z^n - 1}{n} \tag{4}$$

这里出现了 Z^n，对应于物理上构造 n 个相同的模型（一般来讲，相同的态），最后再外推至 $n\to 0$ 的情形。

(4) 在形式上出现了复本的耦合项，引入一个序参量来描述第 α,β 个复本之间的“交叠”

$$q^{\alpha\beta} = \frac{1}{N}\sum_i S_i^\alpha S_j^\beta \tag{5}$$

根据我们引入 (4) 的情境，n 个复本是一致的，$q^{\alpha\beta}$ 为常数，这似乎是平庸而自然的。

这一方法的问题在于，求解出的基态的熵为负数，给出了非物理的结果。

3 Parisi 的复本对称破缺解

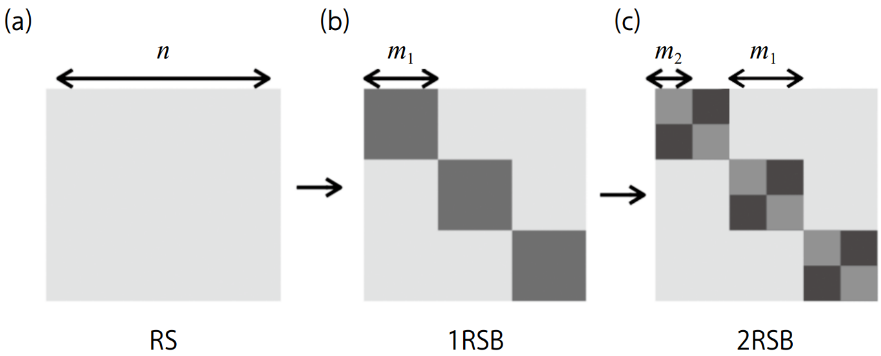

图 2: 复本对称破缺（黄海平：统计物理、无序系统和神经网络）

Parisi 提出了一种修正，认为复本之间不是对称的。由于复本代表了相空间 (体系所有可能状态的集合) 的取样，所以复本对称性实际上表征了相空间的对称性。复本对称性破缺意味着相空间分裂成多个小的子空间。每发生一次这样的分裂，描述 $q^{\alpha\beta}$ 的耦合矩阵的非对角块就分裂成更小的分块。复本对称性破缺的阶数趋向无穷后，复本方法精确给出了自旋玻璃的解。