群论笔记

李小康

2022 年 11 月 12 日

本笔记主要参考：

《群论及其在粒子物理中的应用》姜志进 著，北京：科学出版社，2020.3.

第一章　基本概念与示例

1.1　集合与代数运算

1.1.1　直和与直积

两个集合 A, B 之间有以下几种关系：

$$A \subset B \begin{cases} A \subsetneqq B \\ A = B \end{cases} , \tag{1.1}$$

$$A \cap B \neq \varnothing \ , \tag{1.2}$$

$$A \cap B = \varnothing \ . \tag{1.3}$$

集合之间可以作运算，产生新集合 C

$$\text{sum set: } C = A \cup B \ , \tag{1.4}$$

$$\text{intersection: } C = A \cap B \ , \tag{1.5}$$

$$\text{difference set: } C = A \setminus B \ . \tag{1.6}$$

此外有新的运算，直和与直积，也可以产生新集合 C.

定义 1.1.1 (直和，direct sum set).

若

$$C = \{x | x \in A \cup B, A \cap B = \varnothing\} \ , \tag{1.7}$$

则称 C 是 A, B 的直和，记为

$$C = A \oplus B \ . \tag{1.8}$$

n 个集合的直和记为

$$\sum_{i=1}^{n} {}^{\oplus} A_i = \left\{ x \middle| x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \varnothing \right\} \ . \tag{1.9}$$

因此直和就是无交集的集合简单混合，是加法级的扩展且没有顺序的区别，.

定义 1.1.2 (直积，direct product set).

若

$$C = \{(a, b) | a \in A, b \in B\} \ , \tag{1.10}$$

则称 C 是 A, B 的直积，记为

$$C = A \otimes B \ . \tag{1.11}$$

n 个集合的直积记为

$$\prod_{i=1}^{n}{}^{\otimes} A_i = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n)\} \ . \tag{1.12}$$

注意 (a, b) 是有序元素对，产生的集合（元素对）与原集合（元素）的结构已经不同，是乘法级的扩展且直积有顺序的区别.

1.1.2 代数运算

代数是研究数、数量、关系、结构与代数方程（组）的通用解法及其性质的数学分支。代数的研究对象不仅是数字，而是各种抽象化的结构。在其中我们只关心各种关系及其性质，而对于“数本身是什么”这样的问题并不关心。常见的代数结构类型有群、环、域、模、线性空间等。

定义 1.1.3 (代数运算，algebraic operation)**.**

若存在一个单射 f 使得

$$f : (g_i, g_j) \to g_k, \quad g \in G \ , \tag{1.13}$$

则称 f 为 G 的一个代数运算.

1.1.3 置换

这将是代数运算的一个例子.

定义 1.1.4 (置换，permutation)**.**

通过定义对每一个数字的代换，将一个排列不重不漏地变为另一个排列的映射，称为置换. 不妨用基本排列作为原排列，则置换 p 为

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \ . \tag{1.14}$$

两个置换 p', p 的乘积定义为按 p, p' 的顺序进行置换，这仍然是一个置换. 根据定义(1.1.3)，以上乘法对于置换操作构成的集合是一种代数运算.

由于置换的根本在于数字到 $i \to p_i$ 的映射，因此原排列的顺序并不影响置换的性质.

1.2 群

1.2.1 群的定义

定义 1.2.1 (群，group)**.**

若在集合 G 上定义的代数运算（一般称为乘法）对于 $\forall\ g_k, g_l, g_m \in G$ 满足

$$\text{封闭性} — g_k g_l \in G \ , \tag{1.15}$$

$$\text{结合律} — (g_k g_l) g_m = g_k (g_l g_m) \ , \tag{1.16}$$

$$\text{单位元} — \exists\ g_0 \in G, g_0 g_k = g_k g_0 = g_k \ , \tag{1.17}$$

$$\text{逆元} — \exists\ g_k^{-1}, g_k g_k^{-1} = g_k^{-1} g_k = 1 \ , \tag{1.18}$$

则称该集合在该代数运算下构成群.

我们主要关心群的结构，即该代数运算的映射关系而非群元素.

定义 1.2.2 (群的阶，order of group)**.**
群元素的数目称为群的阶. 根据阶的有限、无限，可以分为有限群和无限群.

定义 1.2.3 (阿贝尔群，Abel group)**.**
乘法满足交换律的群称为 Abel 群，即

$$\forall\ g_k g_l \in G, g_k g_l = g_l g_k\ . \tag{1.19}$$

二阶群只有一个非单位元的群元，因此其乘法必定满足交换律，是 Abel 群.

1.2.2 乘法表

将一个群的所有群元素按照一定次序分别排列在表格的列表头和行标头，行表头代表右乘元素，列表头代表左乘元素，在表中填入对应行列表头相乘得到群元素，则构成了该群的乘法表. 对于有限群，该群的乘法表可以完整地描述群的代数运算. 见表1.1

1.2.3 举例——群和乘法表

全体整数 I、全体实数 R、全体复数 C 对于数的加法构成群. 群的单位元是 0，某个元素的逆元则是其相反数. 三者都构成无限群，也构成 Abel 群. 对于数的乘法则不构成群，因为 0 没有逆元.

所有同阶非奇异矩阵对于矩阵的乘法构成群. 群的单位元是单位矩阵，非奇异矩阵都有逆矩阵. 矩阵乘法不可交换顺序，因此它是非 Abel 群.

使平面等边三角形保持空间取向不变的转动操作，按照两操作相乘为顺序作用的乘法定义，构成一个群，记为 D_3

$$D_3 = \{e, a, b, c, d, f\}\ . \tag{1.20}$$

D_3 群一共有 6 个元素，其含义分别为

$$e \text{ — 不动,} \tag{1.21}$$

$$a, b, c \text{ — 绕中垂线（3 条）旋转 } \pi, \tag{1.22}$$

$$d, f \text{ — 绕垂直中心的对称轴旋转 } \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\ . \tag{1.23}$$

表 1.1: D_3 群的乘法表

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

Pauli 矩阵群 (Σ group). 矩阵

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

的乘法满足

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad i,j,k = 1,2,3 \quad . \tag{1.25}$$

按照以上乘法，以下 8 个元素构成的集合构成群 Σ

$$\Sigma = \{\pm 1, \pm\mathrm{i}\sigma_1, \pm\mathrm{i}\sigma_2, \pm\mathrm{i}\sigma_3\} \ . \tag{1.26}$$

群的单位元为 1，元素 $\mathrm{i}\sigma_i$ 的逆元为 $-\mathrm{i}\sigma_i$.

1.2.4 群的基本性质

定理 1.2.1.

群的单位元唯一.

定理 1.2.2.

任意群元的逆元唯一.

定理 1.2.3 (重排定理)**.**

群 $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，对于 $g \in G$

$$\{gg_i | i = 1, 2, \cdots, n\} = G \ . \tag{1.27}$$

证明.

由于群的封闭性，$gg_i \in G$. 又

$$\forall\ g_j \in G, g_i = g^{-1}g_j, gg_i \in G \ . \tag{1.28}$$

□

群的重排定理是乘法封闭性的体现之一，且群乘法表现出和置换相同的性质：元素的种类和数目不变，只是改变顺序.

1.3 子群和陪集

1.3.1 子群

定义 1.3.1 (子群，subgroup)**.**

若 $H \subset G, H \neq \varnothing$，且 H, G 定义相同的乘法，则称 H 是 G 的子群，记为 $H \subset G$.

注意子群的要求比子集严格，因此采用的符号也不是 $\subset$，而是 $\subset$. 由于单位元的唯一性，显然子母群的单位元相同. 子群的封闭性要求其中每个元素的逆元都被包含在内. 因此子群就是一个独立的小环境，能够自洽的满足群的定义.

定义 1.3.2 (固有子群，proper subgroup)**.**

群 G 本身及其单位元 g_0 都是 G 的子群，称为平庸子群. 群 G 的非平庸子群称为固有子群.

若无特别说明，此后的“子群”均指代固有子群.

1.3.2 举例——子群

对于数的加法，整数群 I 是实数群 R 的子群，实数群 R 是复数群 C 的子群.

D_3 群有 4 个 Abel 子群

$$H_1 = \{e, a\}\,,\; H_2 = \{e, b\}\,,\; H_3 = \{e, c\}\,,\; H_4 = \{e, d, f\}\;\; . \tag{1.29}$$

Σ 群有 4 个 Abel 子群

$$\Sigma_i = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\sigma_i\}\,, (i = 1, 2, 3), \quad Z_2 = \{\pm 1\}\;\; . \tag{1.30}$$

1.3.3 循环群

定义 1.3.3 (循环群，cyclic group)**.**

若 m 阶群的所有元素可以表示成某个元素的整数幂次，即

$$G_g = \left\{g, g^2, \cdots, g^m\right\}, \quad g^m = g_0\;, \tag{1.31}$$

则称该群为循环群.

循环的周期性同样是封闭性的要求，一个元素自乘到某个幂次一定会变成单位元，因此一个群 G 总可以分解为若干个循环子群. 由于群元都是某元素的自乘幂次，因此左乘与右乘没有区别，循环群总是 Abel 群. 循环和轮换具有相同的性质，二阶循环则对应二阶轮换，即对换.

1.3.4 举例——循环子群分解

D_3 群的 4 个子群恰好都是循环群，对 D_3 作循环子群分解

$$D_3 = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}\,, \quad H_k \cap H_l = e, \quad k, l = 1, 2, 3, 4\;, \tag{1.32}$$

$$H_1 = \{e, a\}\,,\; H_2 = \{e, b\}\,,\; H_3 = \{e, c\}\,,\; H_4 = \{e, d, f\}\;\; . \tag{1.33}$$

1.3.5 陪集

定义 1.3.4 (复元素，complex element)**.**

作为元素的集合整体称为复元素. 复元素的乘积定义为按顺序从两集合中各取一项构成的所有乘积项构成的集合.

定义 1.3.5 (左/右陪集，left/right coset)**.**

若

$$H \subset G, \quad g \in G, \quad g \notin H\;, \tag{1.34}$$

则复元素 gH, Hg 分别为子群 H 在母群 G 中的左、右陪集.

定理 1.3.1.

陪集与对应子群无交集，表示为

$$gH \cap H = \varnothing, \quad Hg \cap H = \varnothing\;. \tag{1.35}$$

定理 1.3.2 (陪集定理).

同一子群的不同陪集无交集，表示为

$$g_k H \cap g_l H = \varnothing, \quad g_k \neq g_l \ . \tag{1.36}$$

证明.

□

设陪集 $g_1 H, g_2 H$ 有公共元素，有

$$g_1 h_k = g_2 h_m \Rightarrow g_2^{-1} g_1 = h_m h_k^{-1} \in H \ , \tag{1.37}$$

由定理1.2.3——群的重排定理知

$$g_2^{-1} g_1 H = h_m h_k^{-1} = H \Rightarrow g_1 H = g_2 H \ . \tag{1.38}$$

因此若两陪集有公共元素，则两陪集相同，不同的陪集必无交集.

定理 1.3.3 (子群阶定理).

母群 G 的阶 n 与子群 H 的阶 n_H 之比 n/n_H 为整数，表示为

$$i = \frac{n}{n_H} \in \mathbb{N}^+ \ . \tag{1.39}$$

证明.

由定理1.3.1和定理1.3.3，每对于 H 增加一个陪集 $g_j H$，H 及其已选中陪集的集合就增加 n_H 个不同的群元. 由于有限群的阶数有限，根据群的封闭性，总能无重复地穷尽母群 G 中的所有元素. 因此一个群 G 可以按其子群 H 及其陪集进行无重复地分割，分割的结果（含 H）称为陪集串. 值得注意的是，尽管我们称其为陪集串，但是其中 $g_0 H = H$ 并不是陪集，因为 $g_0 \in H$.

$$G = \{g_0, g_1, \cdots, g_n\} = \{g_{h_0} H, g_{h_1} H, \cdot, g_{h_k} H\}, \quad g_{h_i} \in G, \notin H, \ i = 0, 1, \cdots, k \tag{1.40}$$

其中 $g_0 = g_{h_0}$ 为单位元. □

定义 1.3.6 (子群指标，index of subgroup).

母群 G 的阶 n 与子群 H 的阶 n_H 之比 n/n_H 称为子群 H 在母群 G 中的指标.

显然，阶数为素数的群只有平庸子群.

至此，对于有限群的拆分，我们已经有循环子群分解（单位元重复）和陪集分割（无重复）. 注意本文中分解和分割的区别：分解未必是不重不漏的，而分割特指不重不漏的分解方式. 在后文中也会延续这种区分. 但是在某些情况下，对于分割，我们也会使用“分解”一词，因为二者是包含关系，这样并没有错误.

1.3.6 举例——陪集分割

D_3 群有子群（恰好全为循环子群）

$$H_1 = \{e, a\}, \ H_2 = \{e, b\}, \ H_3 = \{e, c\}, \ H_4 = \{e, d, f\} \ . \tag{1.41}$$

可按 H_1 分割为复元素

$$H_1 = \{e, a\}\,,\ bH_1 = \{b, f\}\,,\ cH_1 = \{c, d\}\ . \tag{1.42}$$

H_1 在 D_3 中的指标为 $i_1 = n/n_{H_1} = 3$. D_3 也可按 H_2, H_3, H_4 作分割，前二者的指标为 3，后者的指标为 2.

1.4 共轭类、正规子群与商群

1.4.1 共轭与类

定义 1.4.1 (共轭元素，conjugate element).
群 G 中，若对于 $f, h \in G$

$$\exists\ g_k \in G, f = g_k h g_k^{-1}\ , \tag{1.43}$$

则称 f 与 h 共轭，记为 $f \sim h$.

根据定义，易证共轭关系具有基本性质：

$$\text{对称性：} f \sim h \Rightarrow h \sim f\ , \tag{1.44}$$

$$\text{传递性：} f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim g\ . \tag{1.45}$$

定义 1.4.2 (共轭子群，conjugate subgroup).
群 G 中，若对于 $H, K \subset G$

$$\exists\ g \in G, H = gKg^{-1}\ , \tag{1.46}$$

则称 H 是 K 的共轭子群. 共轭子群间同样具备共轭关系的基本性质.

定义 1.4.3 (共轭类，conjugate class).
群 G 中所有相互共轭的元素的集合，称为群 G 的一个共轭类 $C^{(i)}$，简称类，即

$$C^{(i)} = \left\{g'_{c^i} | g'_{c^i} = g_j g_{c^i} g_j^{-1}, g_j \in G\right\}\ . \tag{1.47}$$

根据定义，易证类具有基本性质（性质名称笔者自取）：

(1) 单位元自封闭. 群 G 的单位元自成一类，不与其它元素构成类.

(2) 成群排斥性. 由 (1)，非单位元类都不是子群. 也就是说，类和陪集串对成群具有排斥性，不含单位元的元素（类和陪集作为元素）因为排斥单位元而无法构成群.

(3) Abel 元自封闭. Abel 群的每个元素自成一类.

(4) 无交封闭性. 由于共轭关系具有传递性，因此共轭类封闭且不同共轭类之间没有交集. 类和陪集同样具有无交性.

(5) 元素同阶. 同类元素具有相同的阶. 因为若类 $C^{(i)}$ 中的一个元素 g_{c^i} 的阶为 m，则其共轭元素也有

$$\left(g_j g_{c^i} g_j^{-1}\right)^m = g_j g_{c^i} g_j^{-1} = g_j g_0 g_j^{-1} = g_0\ . \tag{1.48}$$

(6) 遍历性. 由于类是所有相互共轭的元素的集合，因此找共轭类时用于作“相似变换”的元素必须可以遍历群元，即

$$\forall\ g_j \in G, g_j C^{(i)} g_j^{-1} = C^{(i)}\ . \tag{1.49}$$

但 g_j 遍历群元时，却不一定只有一次给出同类的元素. 例如对于单位元，只能给出单位元.

从以上六点可以看出，类和陪集具有很多相似的地方. 性质 (4)——无交性，给出分解群的第三种方法——按类分割. 按类分割与按陪集串分割都是无重复的，二者的区别在于陪集串中每个复元素中的元素个数相同，而每个共轭类中的元素数目不一定相同. 共轭类具有封闭性，而陪集串中除子群都不具有封闭性.

定理 1.4.1 (类集自共轭)**.**

若干个类的集合

$$A_C = \left\{C^{(1)}, C^{(2)}, \cdots, C^{(i)}\right\} \tag{1.50}$$

满足

$$\begin{aligned}\forall\ g_j \in G, \quad g_j A_C g_j^{-1} &= \left\{g_j C^{(1)} g_j^{-1}, g_j C^{(1)} g_j^{-1}, \cdots, g_j C^{(i)} g_j^{-1}\right\} \\ &= \left\{C^{(1)}, C^{(2)}, \cdots, C^{(i)}\right\} \\ &= A_C\ .\end{aligned} \tag{1.51}$$

逆命题同样成立.

定义 1.4.4 (类的乘积)**.**

类 $C^{(i)}, C^{(j)}$ 的乘积 $C^{(k)}$ 为

$$C^{(i)} C^{(j)} = \left\{a_{ij} g_{c^i} g_{c^j} \middle|\ \forall\ g_{c^i} \in C^{(i)}, g_{c^j} \in C^{(j)}\right\}\ , \tag{1.52}$$

其中 a_{ij} 是元素 g_{c^i}, g_{c^j} 出现的次数.

根据定义，两类的乘积应该是若干类（可能是其他类）的集合

$$C^{(i)} C^{(j)} = \sum_k a_{ijk} C^{(k)}\ . \tag{1.53}$$

其中 a_{ijk} 是类 $C^{(k)}$ 在 $C^{(i)} C^{(j)}$ 中出现的次数.

定义 1.4.5 (类的和)**.**

群 G 中的类 $C^{(i)}$ 包含 n_i 个元素 $g_k (k = 1, 2, \cdots, n_i)$，则该类中元素的和

$$c^{(i)} = \sum_{k=1}^{n_i} g_k \tag{1.54}$$

称为 $C^{(i)}$ 类的和，在代数运算中作为一个元素.

根据定义，易证类的和具有性质（性质名称笔者自取）：

(1) 对易性. 类的和与任意群元对易，即

$$\forall\ g_j \in G, g_j^{-1} c^{(i)} g_j = c^{(i)} \tag{1.55}$$

$$\Rightarrow c^{(i)} g_j = g_j c^{(i)}\ . \tag{1.56}$$

(2) 封闭性. 类的和 $c^{(i)}, c^{(j)}$ 的乘积仍是类的和（可能是其它类的和）的乘积，且与式(1.53)类似地，有

$$c^{(i)}c^{(j)} = \sum_k a_{ijk}c^{(k)} \ , \tag{1.57}$$

其中 a_{ijk} 是类 $c^{(k)}$ 在 $c^{(i)}c^{(j)}$ 中出现的次数.

定理 1.4.2 (类阶定理)**.**

n 阶有限群 G 中的类 $C^{(i)}$ 包含 n_i 个元素，则

$$\frac{n}{n_i} \in \mathbb{N}^+ \ . \tag{1.58}$$

证明.

引理 1.4.1.

群 G 中所有满足

$$h_i g h_i^{-1} = g, \quad g \in G \tag{1.59}$$

的 h_i 构成 G 的一个子群

$$H_g = \{h_i\}, \quad h_i \in G. \tag{1.60}$$

因此使某元素满足自共轭的所有元素构成子群，这就将类和子群/陪集联系起来. 对此，只需要证明（结合律自动满足）:

(1) 单位元. 单位元 g_0 满足式(1.59)，因此 $g_0 = h_0 \in H_g$.

(2) 逆元. 元素 h_i 的逆元 h_i^{-1} 同样满足式(1.59)，因此 $g_i^{-1} \in H_g$.

(3) 封闭性. 取 h_i, h_j 满足式(1.59)

$$h_i g h_i^{-1} = g, \quad h_j g h_j^{-1} = g \ . \tag{1.61}$$

$$\Rightarrow (h_i h_j)\, g\, (h_i h_j)^- 1 = h_i \left(h_j g h_j^{-1}\right) h_i^{-1} = g \ . \tag{1.62}$$

因此 H_g 中的元素相乘仍满足定义式(1.59)，保持封闭.

根据定理1.3.3——子群阶定理，G 对 H_g 作陪集分割

$$G = g_0 H_g + g_1 H_g + \cdots + g_{i-1} H_g \ , \tag{1.63}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n_{H_g}} = i \in \mathbb{N}^+ \tag{1.64}$$

即为 H_g 在 G 中的指标.

引理 1.4.2.

式(1.63)中的各陪集因子对 g（定义的子群的元素）作共轭变换的集合是一个类

$$C_g = \left\{g, g_1 g g^{-1}, \cdots, g_{i-1} g g_{i-1}^{-1}\right\}. \tag{1.65}$$

对此，只需要证明:

(1) 式(1.63)中，同一复元素 $g_m H_g$ 对 g 的共轭变换得到同一元素. 对于 $g_l, g_m \in g_m H_g$，根据该陪集的构造

$$\exists\ h_k \in H_g,\ g_l = g_m h_k \ . \tag{1.66}$$

$$\therefore g_l g g_l^{-1} = g_m h_k g \left(g_m h_k\right)^{-1} = g_m \left(h_k g h_k^{-1}\right) g_m^{-1} = g_m g g_m^{-1} \ . \tag{1.67}$$

因此同一陪集中的元素对 g 作共轭变换的得到相同元素.

(2) 对 g 作共轭变换得到相同结果的元素属于同一复元素. 由式(1.67)得

$$g = g_m^{-1} g_l g g_l^{-1} g_m = g_m^{-1} g_l g \left(g_m^{-1} g_l\right)^{-1} \ . \tag{1.68}$$

根据 H_g 的定义式(1.59)有

$$g_m^{-1} g_l = h_k \in H_g \Rightarrow g_l = g_m h_k \in g_m H_g \ . \tag{1.69}$$

最终，我们证明了对于 $\forall\, g \in G$，用其所有满足自共轭变换的元素构成的子群 H_g 的某种陪集分割的因子对 g 作共轭变换，可以得到 g 所有的所有共轭元素，即获得其共轭类 C_g. 因此母群阶、子群阶和类阶满足整除关系

$$n_{C_g} = i = \frac{n}{n_{H_g}} \in \mathbb{N}^+ \ . \tag{1.70}$$

由于 g 任意，因此 C_g 也是任意的. □

由该定理，可以发现共轭和子群/陪集具有非常密切的联系.

1.4.2 举例——共轭类

D_3 群可分为三类

$$C^{(0)} = \{e\}\,, \quad C^{(1)} = \{d, f\}\,, \quad C^{(2)} = \{a, b, c\} \ . \tag{1.71}$$

因为

$$\begin{matrix} ede^{-1} = d, & ada^{-1} = f, & bdb^{-1} = f \\ cdc^{-1} = f, & ddd^{-1} = a, & fdf^{-1} = d \end{matrix} \Rightarrow C^{(1)} = \{d, f\} \ , \tag{1.72}$$

同理可得 $C^{(2)} = \{a, b, c\}$. 三个类的阶分别是 $1, 2, 3$，都是 D_3 的阶因子.

类的乘积，例如

$$\begin{aligned} C^{(1)} C^{(2)} &= \{d, f\}\{a, b, c\} \\ &= \{da, db, dc, fa, fb, fc\} \\ &= \{c, a, b, b, c, a\} \\ &= 2\{a, b, c\} \\ &= \left\{2C^{(2)}\right\} \ . \end{aligned} \tag{1.73}$$

1.4.3 正规子群与商群

定义 1.4.6 (正规子群，normal subgroup)**.**

母群 G 的子群 H，若

$$\forall\, g \in G,\ H = gHg^{-1} = \left\{g h_i g^{-1} | h_i \in H\right\} \ , \tag{1.74}$$

则称 H 为 G 的正规子群，即 H 是对任意群元自共轭的共轭子群，又称为自共轭群. 上式也可改写为

$$Hg = gH \ , \tag{1.75}$$

这表明正规子群也可以等价地定义为对于任意陪集因子左右陪集都相等的子群，也称为不变子群 (invariant subgroup).

根据定义，易证正规子群具有性质（性质名称笔者自取）：

(1) 重排性. 对于某元素 $g \in G$，当 h_i 遍历 H 时，$\{gh_ig^{-1}\}$ 仅是 H 内元素的重排，即全给出且仅给出一次. 由于 h_i 遍历 H 时，gh_ig^{-1} 的数目和 H 相同且满足定义. 不同 h_i 的共轭变换给出不同的元素，这是显然的，否则会引起矛盾.

1.4.4 举例——正规子群

D_3 群有子群

$$H_1 = \{e, a\}\,,\ H_2 = \{e, b\}\,,\ H_3 = \{e, c\}\,,\ H_4 = \{e, d, f\}\ . \tag{1.76}$$

D_3 群有类

$$C^{(0)} = \{e\}\,, \quad C^{(1)} = \{d, f\}\,, \quad C^{(2)} = \{a, b, c\}\ . \tag{1.77}$$

由于正规子群是自共轭群，因此当且仅当一个子群是若干类的集合时，它才有可能是一个自共轭群.

$$H_4 = \left\{C^{(0)}, C^{(1)}\right\}\ , \tag{1.78}$$

故只有 H_4 是正规子群.

1.4.5 商群

定义 1.4.7 (商群，quotient group).

群 G 的正规子群 H 可作陪集分割，陪集串

$$g_0H, g_1H, \cdot, g_{i-1}H \tag{1.79}$$

中的复元素的集合构成群，称为 H 在 G 中的商群，记作 G/H，即

$$G/H = \{g_0H, g_1H, \cdot, g_{i-1}H\}\ . \tag{1.80}$$

(1) 封闭性. 由不变子群与陪集因子的对易性

$$g_lHg_mH = g_lg_mHH = g_kH \in G/H, \quad g_k = g_lg_m\ . \tag{1.81}$$

(2) 结合律. 类似 (1)，由不变子群与陪集因子的对易性易证.

(3) 单位元.

$$H\left(g_lH\right) = \left(g_H\right)H = g_lH\ , \tag{1.82}$$

故 H 是单位元.

(4) 逆元.

$$g_lHg_l^{-1}H = g_l^{-1}Hg_lH = g_l^{-1}g_lHH = H \Rightarrow (g_lH) = g_l^{-1}H\ . \tag{1.83}$$

故陪集的逆元为逆陪集因子产生的陪集.

1.4.6 举例——商群

D_3 群按正规子群 $H_4 = \{e, d, f\}$ 作陪集分解

$$H_4,\ aH_4 = \{a, b, c\}\ , \tag{1.84}$$

则 H_4 的商群为

$$D_3/H_4 = \{H_4, aH_4\}\ . \tag{1.85}$$

这是一个二阶循环群.

1.5 总结——群的分解

对于有限群，群的乘法表已经完整地给出了群的代数运算规则，但是该群的性质仍然不够清晰. 我们希望细致地研究群的小结构，研究其组成部分，找出其中的某种最小单元，因此要对群进行分解. 目前已经提到的分解方法有：循环子群分解，陪集分解和共轭类分解. 严格地说，后两者是无重复的分解，如前所述，称为分割. 其中循环子群分解由于不是无重复的分解，因此在群结构的研究中没有后二者重要，但是由其给出的分解方式可以作为铺垫. 接下来我们将以 D_3 群为例，阐述三种分解具体是如何进行的，并描述其关联. 进而，获得不变子群和商群. 若时间允许，以后还将添加 Σ 群作为例子.

表 1.2: D_3 群的乘法表

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

1.5.1 循环子群分解

由于群的封闭性，群 G 的群元 g 自乘到某个有限幂次 m 必然就会变回自身，m 称为群元素的阶. 某个群元 g 自乘的 m 个元素（幂次依次为 $1 \sim m$）的集合，则可以构成子群，称为循环子群，g 作为该循环子群的生成元，通过自乘生成所有元素. 通过遍历所有元素的所有自乘，就能够找到 G 的所有循环子群.

不难发现，这些单生成元循环子群（后面简称单循环子群）就是 G 的所有基本子群，即这些循环子群无法再分解为更低阶的子群，更高阶的子群只能由若干个基本子群组成. 通过遍历所有循环子群的组合，可以找到 G 的所有子群. 值得注意的是，这只是找到一个群的所有子群的其中一种办法，当单循环子群的数目较多时，此种方法的后续组合并不方便.

具体地，对于 D_3，可以作此分解. 首先是群元自乘，虽然上面提到要遍历所有群元，但是容易发现一个群元自乘过程中生成的元素不会在其它单循环子群中出现（单位元除外）. 这

是因为循环群性质使得某个元素一旦“陷入某个循环”，就没办法出来了. 各单循环群之间只共享单位元. 根据表1.2有

$$\left\{a, a^2 = e\right\}, \ \left\{b, b^2 = e\right\}, \ \left\{c, c^2 = e\right\}, \ \left\{d, d^2 = f, d^3 = e\right\} \ . \tag{1.86}$$

因此得到 D_3 的四个单循环子群

$$H_1 = \{e, a\}, \ H_2 = \{e, b\}, \ H_3 = \{e, c\}, \ H_4 = \{e, d, f\} \ . \tag{1.87}$$

对四者进行组合，由于

$$ab = d, ac = f, bc = d, \tag{1.88}$$

故 H_1, H_2, H_3 的任意组合都无法构成子群. 又由于

$$ad = b, bd = c, \tag{1.89}$$

故包含 H_4 的子群都会扩展到 D_3.

因此 D_3 只有四个单循环子群.

1.5.2 陪集分解

获得母群 G 的子群 H 后，由陪集定理，陪集串 $(g_0H, g_1H, \cdots, g_{i-1}H)$ 间无交集，可以对群 G 进行陪集分解. 在共轭类分解中我们会看到陪集分解中不同陪集的意义. 由定理1.3.3——子群阶定理，子群 H 的陪集串复元素数目即其在 G 中的指标 $i = n/n_H$. 进行陪集分解时选择的陪集因子可能不同，但是最后构造出来的陪集是一样的.

具体地，对于 D_3 的 4 个子群分别作陪集分解，每次选择陪集因子时，只需要避开已经构造成陪集的元素即可.

$$H_1 = \{e, a\}, \ bH_1 = \{b, f\}, \ cH_1 = \{c, d\} \ ; \tag{1.90}$$

$$H_2 = \{e, b\}, \ cH_2 = \{c, f\}, \ aH_2 = \{a, d\} \ ; \tag{1.91}$$

$$H_3 = \{e, c\}, \ aH_3 = \{a, f\}, \ bH_3 = \{b, d\} \ ; \tag{1.92}$$

$$H_4 = \{e, d, f\}, \ aH_4 = \{a, b, c\} \ . \tag{1.93}$$

H_1, H_2, H_3 的指标都为 3，H_4 的指标为 2.

1.5.3 共轭类分解

群 G 中所有相互共轭的元素构成一个类，由类的无交封闭性，各类之间也无交集且能完整分割群 G. 由定理1.4.2——类阶定理，类中元素的个数也是群阶的因子.

由于同类的元素都是同阶的，因此我们可以在单循环群中寻找类. 同阶的（群阶）单循环群中的非单位元都是同阶的（元素阶），遍历群 G 对同阶元素作共轭变换从而找出其中的类. 这是一种必要条件筛选加定义判别的方法，其增效的地方主要在于用同阶的要求筛选元素. 1 阶、2 阶和 3 阶的元素集合分别为（显然子群阶数要是母群阶的因子，没有更高阶）

$$\{e\}, \ \{a, b, c\}, \ \{d, f\} \ . \tag{1.94}$$

显然单位元自成一类 $C^{(0)}$. 又由于

$$\left.\begin{array}{lll} ede^{-1}=d, & ada^{-1}=f, & bdb^{-1}=f \\ cdc^{-1}=f, & ddd^{-1}=a, & fdf^{-1}=d \end{array}\right. \Rightarrow C^{(1)}=\{d,f\}\ . \tag{1.95}$$

$$\left.\begin{array}{lll} eae^{-1}=a, & aaa^{-1}=a, & bab^{-1}=c \\ cac^{-1}=b, & dad^{-1}=b, & faf^{-1}=c \end{array}\right. \Rightarrow C^{(2)}=\{d,f\}\ . \tag{1.96}$$

所以 D_3 的同阶元素恰好构成一个类，一共有三个类

$$C^{(0)}=\{e\}\,,\quad C^{(1)}=\{d,f\}\,,\quad C^{(2)}=\{a,b,c\}\ . \tag{1.97}$$

1.5.4 寻找正规子群与商群

由于正规子群的是自共轭群，因此当且仅当一个子群是若干个类集合时，才有可能是一个正规子群. 显然必定要包含单位元构成的类. 因此我们可以将若干类进行组合，根据组合结果是否是若干单循环群的集合来筛选掉不构成子群，通过该判据的组合再进行严格地判断. 若构成子群，则为正规子群.

具体地，对于 D_3 群，$\left\{C^{(0)},\{C^2\}\right\}$ 不构成子群. 因此 D_3 群只有 1 个不变子群

$$H_4=\left\{C^{(0)},C^{(1)}\right\}\ . \tag{1.98}$$

根据商群的定义，其陪集串中的复元素构成商群

$$D_3/H_4=\{H_4,aH_4\}\ . \tag{1.99}$$

1.6 同构与同态

1.6.1 同构

对于群，我们主要关心其代数运算（乘法）的映射关系，而不关心群元本身有什么含义. 对于有限群，其代数运算具体表现为其乘法表. 若存在一个映射使两个群的乘法表相同，则从群论的角度看来，这两个群的结构就是相同的.

定义 **1.6.1** (同构，isomorphism)**.**

若群 G,F 之间存在双射 ϕ，且保持群的乘法规则不变，则称 G,F 同构，记为 $G\approx F$. ϕ 称为同构映射.

根据定义，易证同构映射具有性质：

(1) 单位元映射到单位元. 对于 $g_0,\forall\ g_i\in G$

$$\phi:g_0\to f_0',g_i\to f_i,\quad f_0',f_i\in F\ , \tag{1.100}$$

$$\phi:g_0g_i=g_ig_0=g_i\to f_0'f_i=f_if_0'=f_i\Rightarrow f_0'=f_0\ . \tag{1.101}$$

(2) 逆元映射到逆元. 类似 (1)，易证.

定义了双射之后，若群 F 具有乘法，则其规则也会因为映射关系而保持与群 G 相同. 因此粗看来，找到双射是重要的，而常常可以忽略对新群定义相同的乘法规则.

定理 1.6.1 (Cayley 定理)**.**

任意 n 阶有限群 G 都与 n 元置换群 S_n 的某个子群同构.

由定理1.2.3——群的重排定理，某个群元乘以群中的所有元素等价于将这所有元素重新排序，因此该群元的作用等价于一个置换操作. 不同的元素对应不同的置换，而 S_n 群中包含 n 元置换的 $n!$ 个可能，因此肯定包含 n 阶有限群群元的 n 个等价置换操作. 群的映射显然也构成群，因此有限群必是置换群子群.

1.6.2 举例——同构