

CKM 矩阵及其测量

中山大学 物理学院 李小康 20343038

2022 年 8 月 7 日

摘要： CKM 矩阵是研究夸克弱作用的重要唯象模型。本文作为一篇学习和调研笔记，首先解释 Feynman 规则，接着逐步引出 CKM 矩阵及 CKM 三角形，最后说明当前对其的研究进展并给出最新的全球拟合结果。CKM 三角形的精确测量仍然是当前粒子物理的研究热点，对于确定标准模型下的 CP 破坏和寻找新物理都具有重要意义。

关键词： CKM matrix, CKM triangle, CP violation

1 Introduction

从 Cabibbo 提出 θ_C 解释 u, d, s 的弱作用，到 GIM 机制推广到两代夸克，再到 CKM 矩阵描述三代夸克，作为描述下型夸克的质量本征态与弱本征态之间变换关系的矩阵，CKM 矩阵是研究夸克弱作用的重要唯象模型。由于 CKM 矩阵的矩阵元并不能从标准模型中得到，将其进行标准参数化后的正则参数是标准模型中的基本参数。

CKM 矩阵是标准模型中唯一的 CP 破坏来源，是目前已知的能部分地¹解释宇宙中正负重子不对称的现象。作为夸克弱作用 CP 破坏度量的 CKM 三角形，其面积代表 CP 破坏的程度。对 CKM 三角形内角的测量能够确认标准模型内 CP 破坏的大小，为超越标准模型的新物理提供空间。

此外，虽然在粒子物理中 Lagrangian 更加基本，但因其抽象，且要经过 Euler-Lagrange 方程才能得到结果，故本文主要采用更加形象的 Feynman 规则来描述各个效应。与其说本文是严谨的调研报告，不如说更像是一份个人的学习笔记²。因此本文从基础的理论知识出发，先解释 Feynman 规则；接着按照时间和逻辑顺序依次引入 Cabibbo 角、GIM 机制和 CKM 矩阵，阐述其在 Feynman 规则中的影响；然后从 CKM 矩阵得到 CKM 三角形；最后才来到当前对 CKM 三角形角度的测量结果。

2 Feynman Algorithm[1]

实验探测基本粒子的相互作用有三种方式：bound state, decay 和 scattering。非相对论量子力学（Schrodinger 体系）适合处理 bound state 的问题，而相对论量子力学（Feynman 体系）则适合 decay 和 scattering 问题。

¹但是 CKM 矩阵贡献的 CP 破坏远远不足以解释目前宇宙中的正负重子不对称的现象。

²因此文中的人名、小标题和专有名词都使用英文。

2.1 Fermi's Golden Rule

Fermi's golden rule 给出单位时间内系统在微扰 Hamiltonian H' 下由始态 $|i\rangle$ 到末态 $|f\rangle$ 跃迁概率的一阶近似为

$$T_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H' | i \rangle|^2 \rho(E_f) \quad (1)$$

其中, $\langle f | H' | i \rangle$ 为微扰 Hamiltonian 在始末态下的矩阵元, $\rho(E_f)$ 是末态能量的态密度。对于质心系下的衰变过程

$$\text{Particle 1} \rightarrow \text{Particle 2} + \text{Particle 3} \cdots + \text{Particle } n \quad (2)$$

衰变率³为

$$\Gamma = \frac{S}{2\hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_1 - \sum_{i=2}^n p_i \right) \times \prod_{j=2}^n 2\pi \delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(p_j^0) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4} \quad (3)$$

其中, S 是末态有全同粒子时导致的统计修正, 对每种 s 个全同粒子, S 中都有一个因子 $(1/s!)$; δ 为 Dirac 函数; θ 为 Heaviside 函数。对于衰变过程的运动学约束, 都体现在 δ 函数和 θ 函数中。前者保证四动量守恒和出射粒子在壳, 后者保证出射粒子能量为正。而过程的动力学内容则全部包含在振幅 $\mathcal{M}$ 中, 这需要通过 Feynman 规则来计算。

2.2 Feynman Rules

Feynman 图是粒子相互作用的形象表示, 最简单的完整 Feynman 图 (图1) 包含的结构有

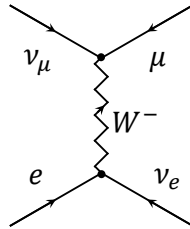


图 1: The simplest complete Feynman diagram

表 1: The structure of Feynman diagram

结构	贡献	含义
外线	实粒子四动量、外线因子	表示可探测的粒子及其状态函数
内线	传播子	表示不确定关系允许存在但无法探测的虚粒子
顶角	顶角因子	表示粒子的相互作用

根据费曼图计算振幅 $\mathcal{M}$ 的费曼规则为

- 四动量: 标出外线四动量 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 和内线 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 的箭头方向

³注意 p_j^2, p_j^0 的区别, 前者表示第 j 个粒子的四动量对自身的内积, 而后者表示第 j 个粒子的四动量的第一分量。文中通过角标的水平偏差距离来区分。

- 外线因子：该因子的地位与波函数相当，但是在场论中可能是多分量的（比如对电子是旋量），要由具体的粒子动力学方程解得。其抽象表示：入射的正、反粒子为 u, v ，放于顶角因子左侧；出射的正、反粒子为 $\bar{u}, \bar{v}$ ，放于顶角因子右侧。
- 顶角因子：对每个顶角写下一个顶角因子
- 传播子：对每条内线，有一个传播因子
- 四动量守恒：对每个顶角，有一个 δ 函数保证进入每个顶角的四动量守恒

$$(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_i k_i \right)$$

- 内动量积分：对每条内线，有一个积分因子。作积分将内动量消除。

$$\frac{d^4 q_j}{(2\pi)^4}$$

- δ 函数相消：利用每个顶角写下的 δ 函数的替换性质，可以得到一个反映整体四动量守恒的 δ 函数。除以该因子，并乘以 i ，则得到 $\mathcal{M}$ 。

$$(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{\text{in}} p_{\text{in}} - \sum_{\text{out}} p_{\text{out}} \right)$$

3 Cabibbo Angle

3.1 Charged Weak Interaction

电荷产生电磁力，色荷产生强力，弱荷产生弱力，所有的夸克和轻子（即所有费米子）都携带弱荷。弱作用有两种：带电的（由 $W^\pm$ 媒介）和中性的（由 Z 媒介）。强力、电磁力、中性弱力的初级顶角都具有共同特点，即不改变夸克或轻子的味道。而带电弱作用是唯一能够改变味道的相互作用。这是因为 W 是唯一带电的玻色子，且由于带电量为 1，夸克耦合 W 的初级顶角必定导致上型夸克到下型夸克（或者反过来）的转变（图2）。

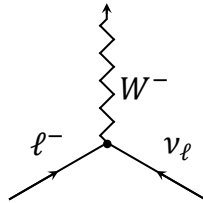


图 2: The primary vertex angle of the charged weak interaction

W 的传播子为

$$\frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M^2 c^2)}{q^2 - M^2 c^2} \approx \frac{ig_{\mu\nu}}{(Mc)^2}, \quad \text{if } q^2 \ll (Mc)^2 \quad (4)$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 为 Minkowski 度规， q 是内线四动量， $q^2 = q^\mu q_\mu$ ， M 为 W 玻色子的质量。当条件满足时，常使用近似表达式。当然，过程涉及的内动量可与 Mc 相比拟时，则必须使用严格的表达式。

W 的顶角因子为

$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma^5) \quad (5)$$

其中 $g_w = \sqrt{4\pi\alpha_w}$ 是弱作用的耦合常数, $\gamma^\mu, (\mu = 0, 1, 2, 3)$ 是 Dirac 矩阵, $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ 。因子 $\gamma^\mu(1-\gamma^5)$ 具有深刻的重要性, 因为单独 γ^μ 代表矢量耦合 (宇称为 -1), 单独 $\gamma^\mu\gamma^5$ 则代表轴矢量耦合 (宇称为 1), 而将矢量与轴矢量相加的耦合是破坏宇称守恒的。对于电磁作用和强作用, 宇称都是守恒的, 宇称不守恒唯独在弱作用中发现。

3.2 Charged Weak Interaction of Quarks

轻子对 W 的耦合严格地发生在代内部⁴, 没有跨代的耦合, 因此三代内有三种轻子数分别守恒。然而 W 对夸克的耦合却不存在这种守恒定律。尽管夸克有类似于轻子的代际结构

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad (6)$$

但是存在跨代的反应过程, 三代夸克的代内量子数只是大致守恒, 即同代的反应概率较大。

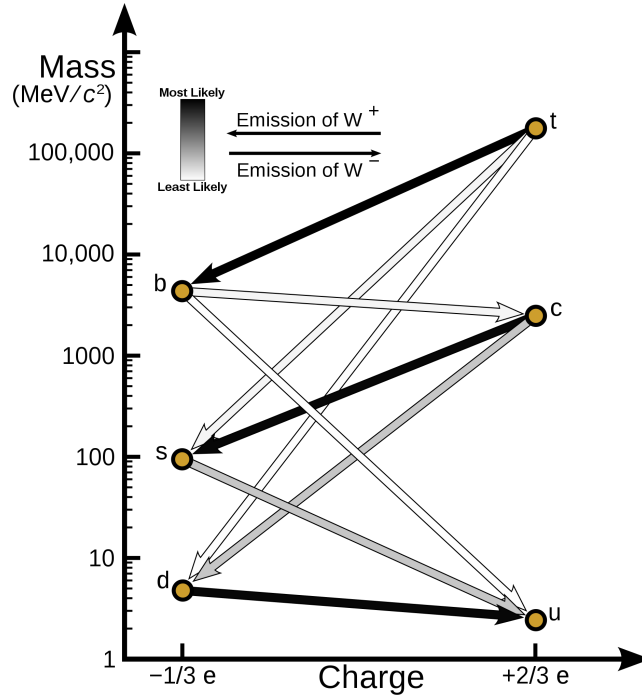


图 3: Decay routes of quarks

1963 年时已知三种夸克 u, d, s , Cabibbo[2] 从唯象学的角度建议: 对于两种初级顶角⁵, 分别多携带一个因子:

⁴ 中微子振荡现象虽然是跨代转变的, 但其标准模型并未给出其原理, 媒介子也未知。

⁵ 由于耦合 W 的初级顶角必定导致上型夸克到下型夸克 (或者反过来) 的转变, 因此对于 u, d, s 只有两种初级顶角。

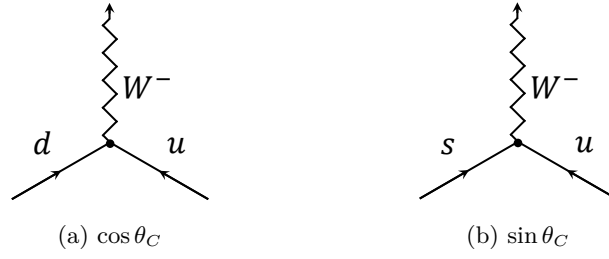


图 4: Cabibbo angle

$$(a) : \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \cos \theta_C, \quad (b) : \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \sin \theta_C \quad (7)$$

4 From GIM Mechanism to CKM Matrix

4.1 Glashow-Iliopoulos-Maiani Mechanism

Cabibbo 的理论在修正很多衰变率时都是很成功的，但是依然存在问题：对于反应 $K^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ ，振幅正比于 $\sin \theta_C \cos \theta_C$ ，算出衰变率远大于实验结果。1970 年，Glashow, Iliopoulos 和 Maiani 引入第四个夸克 c [3]，对 s, d 的耦合分别携带因子 $\cos \theta_C - \sin \theta_C$ 。由于 $M_W \gg m_c > m_u$ ，所以将 u 替换为 c 的反应仍然成立，振幅携带因子 $-\sin \theta_C \cos \theta_C$ 。振幅大小几乎与原来完全相同，只是符号相反，极大地压低了 $K^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ 的衰变率⁶。

GIM 机制引入了和一个简单而漂亮的解释，替代下型夸克⁷的质量本征态 d, s ，在弱作用要使用正确的态势——弱本征态 d', s' 。这两种态势是两组正交基，之间存在简单的线性关系——通过转动矩阵联系。

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad (8)$$

W 耦合到弱本征态则不需要再乘上任何因子，与耦合到前两个轻子代的形式严格相同。

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \quad \text{Weak eigenstate of quark} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{Weak eigenstate of lepton}$$

4.2 Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Matrix

1973 年，Kobayashi 和 Maskawa 将 GIM 机制推广到三代夸克 [4]，弱作用代

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix} \quad (10)$$

通过 CKM 矩阵联系到质量本征态：

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (11)$$

⁶ u, c 的质量不完全相同仍会导致一点差异，抵消不完全剩下的衰变率与实验相符合。

⁷之所以转动下型夸克，是约定俗成的。

矩阵元的下标指明耦合的上下型夸克。CKM 矩阵是一个 3×3 的幺正矩阵，可以通过三个混合角 θ_{ij} 和一个 CP 破坏相位 δ 参数化。存在不同的参数化方法，以下是标准的参数化方法 [5]：

$$\begin{aligned}
 V_{\text{CKM}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, δ 是用于解释标准模型中味道转变过程中的 CP 破坏现象的相位。此外，因为实验上已知 $s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \ll 1$ ，所以能够很好地用近似展开的参数化方式——Wolfenstein 参数化 [6]。定义

$$\begin{aligned}
 s_{12} &= \lambda = \frac{|V_{us}|}{\sqrt{|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2}} \\
 s_{23} &= A\lambda^2 = \lambda \left| \frac{V_{cb}}{V_{us}} \right| \\
 s_{13}e^{i\delta} &= V_{ub}^* = A\lambda^3 (\rho + i\eta) = \frac{A\lambda^3(\bar{\rho} + i\bar{\eta})\sqrt{1 - A^2\lambda^4}}{\sqrt{1 - \lambda^2}[1 - A^2\lambda^4(\bar{\rho} + i\bar{\eta})]}
 \end{aligned} \tag{13}$$

以上定义保证了 $\bar{\rho} + i\bar{\eta} = (V_{ud}V_{ub}^*) / (V_{cd}V_{cb}^*)$ 是相位约定无关的，并且对于所有阶的 λ ，以 $\lambda, A, \bar{\rho}, \bar{\eta}$ 写成的 CKM 矩阵都是幺正的。如此，则能够将 CKM 矩阵展开至三阶。

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4) \tag{14}$$

由于 CKM 矩阵的幺正性，矩阵元之间存在正交关系

$$\sum_i V_{ij}V_{ik}^* = \delta_{jk}, \quad \sum_j V_{ij}V_{kj}^* = \delta_{ik} \tag{15}$$

最通常选择以下正交关系来构成复平面三角形。

$$\begin{aligned}
 V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} + 1 + \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} &= 0 \\
 \Rightarrow \bar{\rho} + i\bar{\eta} + 1 + \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} &= 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

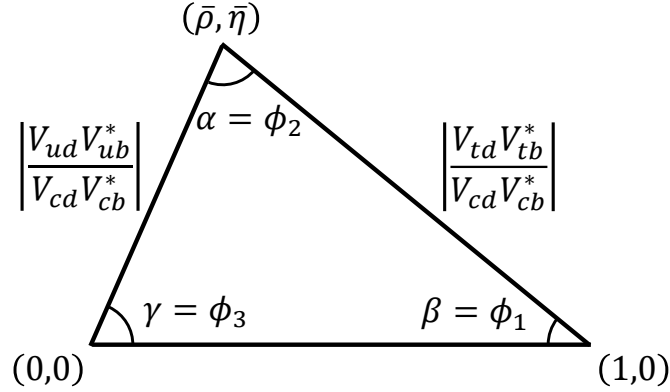


图 5: CKM triangle

构成三角形的三条边的复数分别为 $\bar{\rho} + i\bar{\eta}$, 1 , $V_{td}V_{tb}^*/V_{cd}V_{cb}^*$ 。通过合适地选取原点, 三角形的顶点分别为 $(0,0)$, $(0,1)$, $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$, 如图5。也可以选取其它正交关系来构成三角形, 但是所有的三角形面积相等, 都是 Jarlskog 不变量的一半。由于 Jarlskog 不变量是相位约定无关的 CP 破坏度量, 因此 CKM 三角形的面积就能度量 CP 破坏。Jarlskog 不变量的定义为

$$\mathcal{J} \sum_{m,n} \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} = \text{Im} [V_{ij} V_{kl} V_{il}^* V_{kj}^*] \quad (17)$$

在 M_W 能标以下, CKM 矩阵元都可视为常数。味道物理的一大目标就是尽量约束 CKM 矩阵元的数值, 而在 CKM 三角形上能够方便比较和展示测量结果。三角形的三个角分别为

$$\begin{aligned} \alpha = \phi_2 &= \arg \left[-\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*} \right] \\ \beta = \phi_1 &= \arg \left[-\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*} \right] \\ \gamma = \phi_3 &= \arg \left[-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

5 Measurements of CKM Matrix[5]

5.1 β or ϕ_1

B 介子衰变中的 CP 破坏为 CKM 三角形的内角提供直接的信息。中性 B 介子衰变到共有末态的时间依赖 CP 不对称程度由下式描述

$$\mathcal{A}_f = \frac{\Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow f) - \Gamma(B^0(t) \rightarrow f)}{\Gamma(\bar{B}^0(t) \rightarrow f) + \Gamma(B^0(t) \rightarrow f)} = S_f \sin(\Delta m_d t) - C_f \cos(\Delta m_d t) \quad (19)$$

$$S_f = \frac{2\text{Im}\lambda_f}{1 + |\lambda_f|^2}, \quad C_f = \frac{1 - |\lambda_f|^2}{1 + |\lambda_f|^2}, \quad \lambda_f = \frac{q}{p} \frac{\bar{A}_f}{A_f}, \quad \frac{q}{p} = \frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{tb}V_{td}^*} = e^{-2i\beta + \mathcal{O}(\lambda^4)} \quad (20)$$

其中 q/p 描述 $B^0 - \bar{B}^0$ 的混合, 在 λ 的三阶近似下描述 β 角; A_f ($\bar{A}_f$) 是 B^0 ($\bar{B}^0$) $\rightarrow f$ 的振幅。如果 f 是 CP 本征态, 而且主导衰减的是含一个 CKM 相位的振幅, 那么

$$|A_f| = |\bar{A}_f|, \quad C_f = 0, \quad S_f = \sin(\arg \lambda_f) = \eta_f \sin 2\phi \quad (21)$$

其中 η_f 是 f 的 CP 本征值, 2ϕ 是 $B^0 \rightarrow f$ 与 $B^0 \rightarrow \bar{B}^0 \rightarrow f$ 两个衰变路径的相位差。衰变道

$$B^0 \rightarrow J/\psi + K_{S,L}^0 \quad (b \rightarrow c\bar{c}s) \quad (22)$$

给出了 $S_f = -\eta_f \sin 2\beta$ 目前最精确的测量结果。

5.2 α or ϕ_2

与 $\sin 2\beta$ 不同的是, 由于 α 是 $V_{tb}^* V_{td}$ 和 $V_{ub}^* V_{ud}$ 相关的相位, 只有由 $b \rightarrow u\bar{u}d$ 主导的时间依赖的 CP 不对称衰变才能直接测量 $\sin 2\alpha$ 。而由于 $b \rightarrow d$ 的 penguin 图⁸振幅与 $b \rightarrow u\bar{u}d$ 的树图振幅有不同的 CKM 相位, 且二者都在 λ 的数量级, 故测量变得比较复杂。目前主要通过衰变道

$$B \rightarrow \pi\pi, \rho\pi, \rho\rho \quad (23)$$

来测量。

以 $B^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ 为例。由于 penguin 图的贡献, $S_{\pi^+\pi^-}$ 并不能直接测量 $\sin 2\alpha$, 但其与 α 有关。

$$S_{\pi^+\pi^-} = \sqrt{1 - C_{\pi^+\pi^-}^2} \sin(2\alpha + 2\Delta\alpha) \quad (24)$$

其中 $2\Delta\alpha$ 是 $e^{2i\gamma} \bar{A}_{\pi^+\pi^-}$ 和 $A_{\pi^+\pi^-}$ 之间的相位差。利用三个 $B \rightarrow \pi\pi$ 衰变道的振幅之间的同位旋关系

$$\frac{1}{\sqrt{2}} A_{\pi^+\pi^-} + A_{\pi^0\pi^0} - A_{\pi^+\pi^0} = 0 \quad (25)$$

可以得到 $\Delta\alpha$, 进而得知 α 。

5.3 γ or ϕ_3

由式18中 CKM 三角形中角度的定义, γ 不依赖顶夸克有关的 CKM 矩阵元, 故其能在树图级别的 B 介子衰变中被测量。这也是 γ 的测量区别于 α, β 的地方。由衰变道

$$\begin{aligned} B^- &\rightarrow D^0 K^- \quad (b \rightarrow c\bar{u}s) \\ B^- &\rightarrow \bar{D}^0 K^- \quad (b \rightarrow u\bar{c}s) \end{aligned} \quad (26)$$

之间的干涉, 理论上能够从实验数据中得到相对的强相角、弱相角 γ , 但实际上复杂的地方在于计算结果的精度灵敏地依赖于干涉振幅比 r_B 。

$$r_B = \left| \frac{A(B^- \rightarrow \bar{D}^0 K^-)}{A(B^- \rightarrow D^0 K^-)} \right| \quad (27)$$

BPGGSZ 方法利用 $D^0, \bar{D}^0$ 衰变到 CP 自共轭的三体末态⁹的反应道具有最大分支比的事实, 以及通过研究 Dalitz 图¹⁰对于干涉的依赖从而优化分析的方法, 给出 γ 目前最精确的结果。

⁸penguin 图是一类费曼图, 对于理解标准模型中的 CP 破坏过程具有重要意义。它指的是一个循环过程, 其中夸克通过 W/Z 循环暂时改变风味, 并且风味改变的夸克参与某种树相互作用, 通常是强相互作用。由于该图形状类似企鹅, 因此被命名为企鹅图。

⁹例如 $K_S^0 \pi^+ \pi^-$

¹⁰Dalitz 图是粒子物理学中常用的二维图, 用于表示也许能将三体衰变的产物分开的各种运动学上不同的方式的相对频率。

6 Global fit in the Standard Model

PDG¹¹上归纳了全球实验的最佳数据拟合结果，CKM 矩阵元、Wolfenstein 参数化参数、标准参数化参数与 CKM 三角形相角的结果罗列如下 [7]。

CKM 矩阵元大小：

$$|V_{\text{CKM}}| = \begin{pmatrix} 0.97435 \pm 0.00016 & 0.22500 \pm 0.00067 & 0.00369 \pm 0.00011 \\ 0.22486 \pm 0.00067 & 0.97349 \pm 0.00016 & 0.04182^{+0.00085}_{-0.00074} \\ 0.00857^{+0.00020}_{-0.00018} & 0.04110^{+0.00083}_{-0.00072} & 0.999118^{+0.000031}_{-0.000036} \end{pmatrix} \quad (28)$$

Wolfenstein 参数化参数：

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.22500 \pm 0.00067, & A &= 0.826^{+0.018}_{-0.015} \\ \bar{\rho} &= 0.159 \pm 0.010, & \bar{\eta} &= 0.348 \pm 0.010 \end{aligned} \quad (29)$$

标准参数化参数：

$$\begin{aligned} \sin \theta_{12} &= 0.22500 \pm 0.00067, & \sin \theta_{13} &= 0.00369 \pm 0.00011 \\ \sin \theta_{23} &= 0.04182^{+0.00085}_{-0.00074}, & \delta &= 1.144 \pm 0.027 \end{aligned} \quad (30)$$

CKM 三角形相角：

$$\alpha = (85.2^{+4.8}_{-4.3})^\circ, \quad \sin 2\beta = 0.699 \pm 0.017, \quad \gamma = (65.9^{+3.3}_{-3.5})^\circ \quad (31)$$

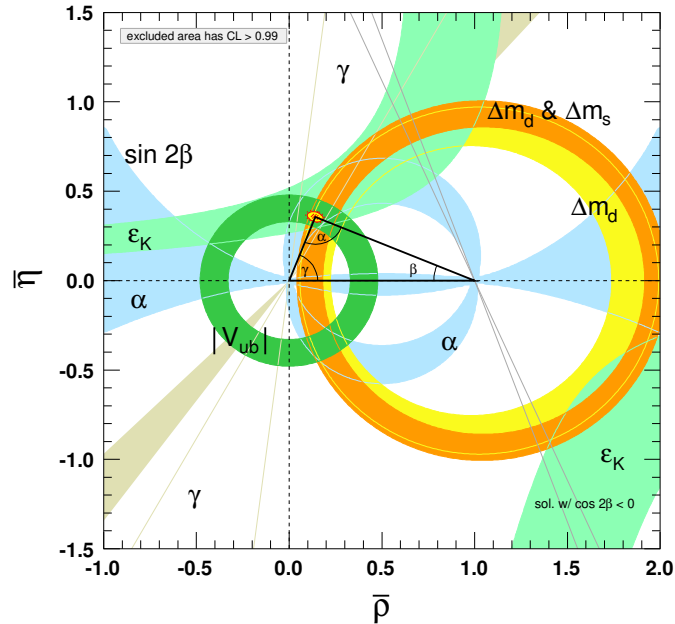


图 6: Global fit of CKM triangle

¹¹Particle Data Group, 粒子数据组, 是粒子物理学家的国际合作组织, 它编译和重新分析与粒子特性和基本相互作用相关的已发表结果。它还发表对现象学相关理论结果的评论, 包括宇宙学等相关领域的理论结果。

参考文献

- [1] David Griffiths. Introduction to particle physics, 1987.
- [2] Nicola Cabibbo. Unitary symmetry and leptonic decays. *Physical Review Letters*, 10(12):531–533, 1963.
- [3] Sheldon L Glashow, Jean Iliopoulos, and Luciano Maiani. Weak interactions with lepton-hadron symmetry. *Physical review D*, 2(7):1285, 1970.
- [4] Makoto Kobayashi and Toshihide Maskawa. Cp-violation in the renormalizable theory of weak interaction. *Progress of Theoretical Physics*.
- [5] Z. Ligeti (LBNL) A. Ceccucci (CERN) and Y. Sakai (KEK). Review of particle physics. *PTEP*, 2022:083C01, 2022.
- [6] Wolfenstein. Parametrization of the kobayashi-maskawa matrix. *Physics Review Letters*.
- [7] R. L. Workman and Others. Review of particle physics. *PTEP*, 2022:083C01, 2022.